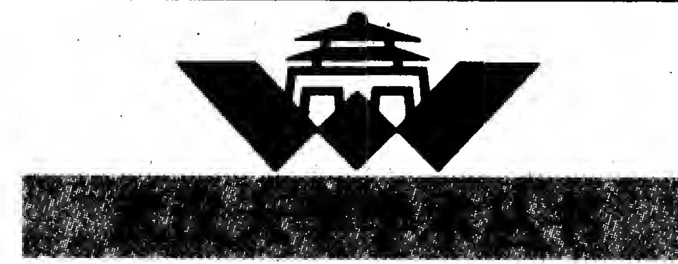


现代偏微分方程引论

齐民友 徐超江 王维克
编著

武汉大学出版社

内 容 简 介

微局部分析自20世纪60年代中创立以来在推动偏微分方程理论的发展上已有长足的进步。迄至70年代末已成定型，人称“70年代算法”。其后更向精密化发展；同时由线性领域向非线性领域发展。这显然是90年代大有希望的研究方向。本书的目的是就两个专门问题：非线性奇性分析以及次椭圆问题介绍这些发展，其中不少内容是作者本人的研究成果。本书的结构大体上是：第2,3,4章主题是非线性微局部分析，包括J.-M. Bony所创立的仿微分算子理论以及非线性奇性分析。后三章包括了非齐性Sobolev空间上的拟微分算子理论和它在次椭圆问题上的应用，以及高次微局部的理论等。以上两部分都是当前正在活跃发展的研究领域。为了使读者能明了这些进展的由来并方便读者阅读，在第1章中系统而又概括地介绍了经典的微局部分析。

图书在版编目(CIP)数据

现代偏微分方程引论/齐民友，徐超江，王维克编著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2005.4
(武汉大学学术丛书)
ISBN 7-307-04555-9

Ⅰ.现… Ⅱ.①齐… ②徐… ③王… Ⅲ.偏微分方程
Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第030449号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：880×1230　1/32　印张：11.125　字数：305千字　插页：3
版次：2005年4月第1版　　2005年4月第1次印刷
ISBN 7-307-04555-9/O·325　　定价：23.00元

目　　录

引　　言

1822 年 Fourier 发表了他的名著“热的解析理论”. 自此，我们有了 Fourier 级数、Fourier 积分，总之有了调和分析. 在数学中几百年来一直充满着活力向前发展而且对数学以及其他科学产生了越来越大的影响. 这样的数学分支不多，调和分析毫无疑问是一个例子（也许另一个例子是 Lie 群). Fourier 的著作的意义也远远超出了数学本身. 下面只从与本书有关的角度来谈谈这个问题.

Fourier 在他的书里研究了有限长杆上的热传导方程的混合边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases}$$

并用我们今天熟知的分离变量法将它的解写成了

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

这样他回答了 18 世纪围绕弦振动方程产生的一场争论：当时即已知道，弦振动方程的通解是 $\varphi(x-ct)$，φ 是任意函数，于是，什么叫“任意函数”？例如用两个式子在不同区间上定义的函数，如

$$\varphi(x) = \begin{cases} cx, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant x_0 < l, \\ cx_0 + A(x - x_0), & \text{当 } A = cx_0(x_0 - l)^{-1},\ x_0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

算不算一个函数？而 Fourier 的级数解告诉我们，刻画温度分布的函数，不论其形状如何，都同时可以用一个级数——或者说用其系数所成的序列 $\{a_n\}$ 来表示. 如果视 n 为自变量，并记为 ξ，则 $\{a_n\}$ 也

可视为 ξ 的函数，但 ξ 限于取整数值. 我们不妨记为 $\hat{\varphi}(\xi)$，说明它与 $\varphi(x)$ 有关. 如果同一个物理过程可以用两个不同的式子或 $\varphi(x)$ 或 $\hat{\varphi}(\xi)$ 来表示，则关于什么是一个函数的争论也就退居后位了.

Fourier 这本书的最后一部分讨论半无限长杆上的温度分布，得到了 Fourier 积分，用我们今天的记号来写，即是

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \tag{1}$$

而

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx. \tag{2}$$

现在我们将此式，即由 $\varphi(x)$ 到 $\hat{\varphi}(\xi)$ 的变换称为 Fourier 变换，而将前式称为逆变换. 这样有了一种对偶：$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$.

多年来，Fourier 级数与 Fourier 积分成了分析数学的核心之一，特别是现在称之为“硬分析”的那一部分. 由它所带来的数学上的贡献有：Riemann 积分、Lebesgue 积分，特别是集合论. 从微分运算角度来看，由(1)有

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}(\xi\hat{\varphi}(\xi))d\xi.$$

即是说微分与乘法对偶. 可见，对偶的概念比一般的对应乃至同构还要丰富，广义函数理论的基石也是对偶. 但这是我们今天的理解. 在当时，人们还只能知道“求导”也可以“看”成一种乘法. 其实这是一个历史久远的思想. L. Euler 在研究常系数线性常微分方程时，就把它写作

$$\sum_{k=0}^{m}(a_k D^k)y = f(x), \tag{3}$$

而

$$y = f(x)\Big/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k. \tag{4}$$

他可以对多项式 $\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$ 作因式分解，可以把 $1\Big/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$ 化为分项分式……这一切我们在大学二年级课程中都已熟知，并称之为“形式解法”，因为当时人们的理解确实是形式的.

20 世纪 20～30 年代量子物理学的出现不但是科学史上而且是人类思想史上的大革命. 对于它的影响作全面的估计不是本书的任务，但是它的出现同时也开辟了数学上的新时期是毫无疑问的. 至少，说全部经典的泛函分析都是由量子物理催生的，这不是过分之词. 从本书的角度来看，对偶的思想又有了十分实质的发展. 量子物理要求将经典的物理量量子化，即用算子(自伴的)来表示. 例如 D_{x_j} 表示 x_j 方向的动量，这样，同一个物理状态可以用两种不同的方式来表示(称为表象)：用 x 表示(坐标表象，x 表象)或用 ξ 表示(动量表象，ξ 表象). 对偶的表象之互相转化可以用 Fourier 变换来实现. 所以，调和分析特别是 Fourier 变换成了量子物理的有效的数学工具. 但在量子物理中，互相对偶的量不能同时准确地测量. 如果 x 与 ξ 的测量分别有误差 $\Delta x, \Delta\xi$，则

$$\Delta x\,\Delta\xi \geqslant h/2\pi, \quad h \text{ 是 Planck 常数},$$

这就叫“测不准原理”. 测不准关系与算子的不可交换性紧密相关. 所以我们还需要将不可交换性引入调和分析.

以上所述可以说是微局部分析产生的数学和物理背景. 但它作为一种系统的理论出现应该说是 20 世纪 60 年代中期的事，即以拟微分算子的出现为标志. 拟微分算子的直接前身是 Zygmund，Calderon 所建立的奇异积分算子理论. 奇异积分算子理论是调和分析的重大发展，它一出现，就对解决偏微分方程的重大问题——Cauchy 问题的唯一性做出了重大贡献. 拟微分算子的出现又在椭圆算子的指标问题(Atiyah-Singer 指标定理)的研究上起了重大作用. 它归根结蒂是调和分析的新发展，而且确实考虑了不可交换性. 微分方程的 Euler 形式解法的根本局限如下：即方程的系数 a_k 是常数，所以 a_k 与 D^k 可以交换：$a_k D^k = D^k a_k$. 但若 $a_k = a_k(x)$，则上式不成立. 用现代的语言说即 $a_k(x)$ 与 D^k 的交换子“乘积”不为 0，

$$[a_k(x), D^k] \neq 0, \tag{5}$$

这时形式解法就无能为力了. 所以，Fourier 变换可以用于讨论常系数偏微分方程，而对变系数方程 $\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f$ 就需要用拟

微分算子了. 拟微分算子形状上就是推广的 Fourier 变换:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \tag{6}$$

$a(x,\xi)$称为其象征. 例如对上述偏微分方程就有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{7}$$

因此要建立算子作为一方、象征作为另一方的对应关系. 适应量子物理的需要, 算子的乘积应为不可交换的, 与此相应, 对象征需要建立一种不可交换的"乘法". 又, 在求解(3)时, 我们将微分算子的逆形式写为 $1/\sum_{k=0}^{m}a_k D^k$, 现在要求 A 之"逆", 则应考虑以 $[a(x,\xi)]^{-1}$为象征的拟微分算子. 所有这些问题在拟微分算子理论中都得到了圆满的解决. 所以, 微局部分析, 特别是拟微分算子理论, 不妨说是量子物理时代的调和分析.

微局部分析理论的出现告诉我们, 过去我们是在 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 Ω 上讨论偏微分方程, 现在应该把 x 与 ξ 放在完全平等的地位, 而在 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$上讨论它. $\mathbf{R}^n\backslash 0$ 是 ξ 的变化域. $\xi=0$ 总是应该排除的, 这与 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$的几何构造大有关系. 用现代语言来说, 即 Ω 的余切丛除去零截面: $T^*\Omega\backslash 0$. 因此, 可以说, 微局部分析就是在 $T^*\Omega\backslash 0$ 上讨论偏微分算子, 首先是它的代数演算.

在余切丛上讨论物理问题, 在物理上很早就有先例. 其一是光的波动学说中的 Huygens 原理. 这个原理简单地说, 即光的传播有波前面, 波前面的前方是光波影响未到之处, 其后方则在光波的影响区域之内. 波前的各点又成了新的光源, 再产生次级波前. 次级波前的包络面即下一个时刻的新波前. 在这样的几何分析中, 波前的法线(在现代数学的语言中应该说是余法线), 起了很关键的作用. 如果从某一点起沿波前面的法线追踪, 即得到"射线". 波前面的位置与波前面传播的方向是同样重要的. 在这个意义上来说, Huygens 原理是一个微局部的原理: 既要考虑波前面上各点的坐标 x, 又要考虑该点处波前面的余法线向量 ξ. 另一个例子是渐近解的问题. 自从量子物理出现以来, 即产生量子力学与经典力学的关系

问题. 物理学家很明白, 若视 Planck 常数为一个小参数 ε, 则当 $\varepsilon\to 0$ 时, 量子力学就转化为经典力学. 因此, 将一个偏微分方程的解按小参数展开——即所谓渐进展开, 就成了数学物理中一个重要的方法. 物理学家则称之为 WKB 方法, 或几何光学近似、准经典近似等. 但是这种渐近展开时常只是局部有效. 由局部性过渡到整体性有一种障碍, 在光学中时常称为焦散现象. 20 世纪 60 年代, 前苏联数学家 V. P. Maslov 指出, 这种障碍的出现是因为人们常局限于 x 表象. 如果平等地采用 x 表象与 ξ 表象, 或者用混合表象(一部分变元仍为 x, 另一部分为 ξ), 则问题自然解决. 其后的 Fourier 积分算子理论, 也可以说是这个思想的展开. 这种思想发展至今已成了一个重要的数学分支——半经典(或准经典)分析.

这些在物理上非常明确的思想在数学上一直到 20 世纪 60～70 年代才形成完整的数学理论, 这与数学工具的发展有密切的关系. 上面说过拟微分算子的直接前身是 A. Zygmund 和他的学生 A. P. Calderon 所领导的学派, 在 50 年代关于奇异积分算子的研究. 关于准经典近似的工作则必须回到关于解析力学的近代表述, 特别是辛几何理论以及相关的拓扑学的研究. 还应该指出, 日本数学家佐藤干夫关于超函数理论的研究, 以及他所创立的学派所建立的代数分析学, 是在实解析函数框架下的微局部分析, 它广泛地应用了代数学的最新的发展. 正因为微局部分析继承和发展了这样多数学分支的成果, 所以有时给人以望而生畏的感觉.

总之, 微局部分析不只是偏微分方程的一个分支, 而是它发展至今的一种观点、一种思想、一种方法. 有许多最新的研究工作, 尽管没有说自己就是微局部分析, 但实际上都恰好表现了这种观点、思想和方法. 它的出现至少使整个线性偏微分方程理论改变了面貌. 这方面最完整的概括是 L. Hörmander 的四卷本巨著[Hö2].

在作者之一写的书[Qi]的序言中曾说过: "这个领域还在迅速发展, 看不出有停下来或者放慢步伐的迹象, 例如, 正当我们用了很大力量来掌握微局部分析时, 它却已被人称为'70 年代算法', 而到了 20 世纪 80 年代中期的现在, 它又发展到新的水平." 现在可以

说，微局部分析已经成熟了．如果说在 70 年代，还需要建立框架，现在则是需要解决新的具体问题．这样，一方面我们会感到它比较容易掌握了．另一方面则新问题层出不穷．从目前看，越来越多地与应用数学和其他科学，如物理和力学结合，是一个明显的趋势．我们建议，读者若有可能翻阅一下 1990 年在日本京都召开的国际数学家大会的文集，特别注意 R. Melrose [Mel3]，M. Taylor [Ta3]，A. Majda [Ma]，P.-L. Lions [Li]，L. Tartar [Tar]等人的报告，若能浏览一下法国 Ecole Polytechnique 的讨论班每年一册的文集和每年一度的 Saint Jean de Mont 会议的论文集，就会对当代偏微分方程理论的这种观点、思想和方法发展的现况有深刻的印象了．

正因为微局部分析还在迅速发展之中，这本书不可能涉及很多方面，而只挑选了两个问题．首先是非线性微局部分析．非线性偏微分方程解具有线性方程所没有的奇性，这一点首先是 G. F. B. Riemann 指出的．他在 1860 年研究有限振幅的声波的传播时，第一次提出了“激波”这一名词．激波是一种强奇性，但甚至在弱奇性范围内，无论是从几何角度或从分析角度来看，非线性问题都表现出更为丰富的内容．近年来的事实表明，微局部分析用于非线性偏微分方程是卓有成效的．首先需要提出研究的框架，这就是 Sobolev 空间，而所谓奇性即是指解 u 是属于某个 Sobolev 空间 $H^s_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 的广义函数，而 s 比较小．但是 Sobolev 空间之元均为 $\mathscr{S}'$ 广义函数，它的奇性可以通过 Fourier 变换表现出来，即 x 域中的非光滑性的点(不妨称为“坏”点，其集合即奇支集 sing supp u)，可以用 ξ 域中 $\hat{u}(\xi)$ 的增长性(即缺少急减性质)来刻画，而急减性质的破坏发生在某些我们称之为“坏”方向的方向上．把“坏”点与“坏”方向结合起来，就得到很重要的波前集的概念．把这种作法与 Huygens 原理作一个比较是很有趣的．在讨论非线性偏微分方程解的奇性时，还不能只停留在波前集的一般概念上，而要着重研究这样一类解，它们是某个 Sobolev 空间的元素 u，而且有一个确定的子流形，使 u 在该流形的切向上相对地比较光滑，奇异性则发生在其余法线方向

上．这种广义函数称为余法分布，其奇性相应地称为余法奇性，这个概念的物理背景是显而易见的．

为了处理这类问题，拟微分算子理论需要进一步发展．一个途径是研究只有有限光滑性(而不是 C^∞)的象征．另一个则是 J.-M. Bony 提出的仿微分算子理论．产生困难的根源仍在广义函数的奇性．以最简单的非线性运算乘法为例，两个广义函数 u_1, u_2 一般不能相乘，就是因为各个因子的奇性导致的，因此只要对其波前集作一定的限制，就可以合理地定义其乘积．但现在我们可以更有系统地处理非线性运算．我们可以在 ξ 域中将 u_1 与 u_2 之奇性分离出来，并对其较“好”的成分来进行运算．这种将 ξ 域中的奇性分离出来的方法早在 20 世纪 30 年代 Littlewood 与 Paley 的工作中即已提供了．利用这个工具，J.-M. Bony 和他的学生们建立了仿乘积、仿复合，以及一般的仿微分算子理论．同时还适应边值问题研究的需要，建立了对某一子流形的切向的仿微分算子理论．

与线性方程情况不同，非线性奇性在相互作用下会产生新的奇性．举例来说，讨论一个双曲型方程的两解 u_1 与 u_2，它们在 (x_1, ξ_1) 与 (x_2, ξ_2) 附近微局部地属于 H^{σ_1} 与 H^{σ_2}，这些奇性将沿过 (x_j, ξ_j)，$j=1,2$ 的次特征传播，而可能在 (x_0, ξ) 相遇．在相遇后这两个奇性很可能并不相消，而在该点附近成为微局部的 σ 阶奇性，而

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{n}{2}.$$

若 (x_0, ξ) 恰好又是特征点，则这个 H^σ 奇性将沿着过 (x_0, ξ) 的次特征传播，这样解就出现了新的奇性．这个领域中至今仍存在大量未解决的问题．

从微局部分析观点来论述非线性问题的，可以参看 L. Hörmander [Hö6]．这是他在 1986～1987 年在 Lund 大学的一个讲义，对非线性双曲型方程近年来许多重要工作做出了新的概括．还可以看 M. Taylor [Ta2]，这本书论述的范围则超过了 Hörmander 的讲义．关于 Bony 学派的工作，可以参看他自己的总结[Bon5]．这几本书和文章都有丰富的文献目录．

第二个问题是关于椭圆性问题. 在整个偏微分方程理论中，椭圆型方程(线性和非线性的)理论是发展得最好的. 自 20 世纪 50 年代末，开始了退化椭圆方程的研究. 这是由于不论在物理、力学或其他数学分支(复分析和微分几何)中都出现了重要的退化椭圆算子. 其中一个重要的例子是 Hörmander 的平方和算子

$$A = \sum_{j=1}^{m} X_j^2(x) + X_0(x) + C(x), \tag{8}$$

这里 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 是 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的实的 C^∞ 向量场. 这类算子不但包含了椭圆算子，还包括抛物型算子. L. Hörmander 的经典性的结果表明：当 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 满足所谓 Hörmander 条件时，A 是亚椭圆算子. 其中就有不少退化的椭圆算子. 例如

$$X_j = \partial_{x_j},\ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad X_n = x_1\partial_{x_n},$$

它们是满足 Hörmander 条件的. 但

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^2(x) = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2 + x_1^2\partial_{x_n}^2$$

是一个具有很强退化性质的退化椭圆算子.

L. Hörmander 指出，这种算子是次椭圆(sub-elliptic)算子. 说 m 阶算子 L 是一个次椭圆算子，即对它有以下的所谓次椭圆估计成立：

$$\| u \|_{m-\varepsilon} \leqslant C_1 \| Lu \|_0 + C_2 \| u \|_0,$$
$$u \in C_0^\infty(\Omega),\ 0 < \varepsilon < 1, \tag{9}$$

即发生光滑性的损失. 如果 L 是椭圆算子，则(9)式对 $\varepsilon=0$ 成立. (9)式这种估计(在不同空间中)是研究椭圆方程的基本工具，最早的是 Schauder 估计. 现在的问题是，若算子 L 适合(9)式而 $\varepsilon=0$，L 是否一定是椭圆算子？本书第 6 章回答了这个问题，答案是肯定的.

次椭圆算子是一个很重要的类别，可以说它是仅次于椭圆算子的一大类. 因此，自然想把它推广到非线性情况上. 如果 A 是拟线性的，即有

$$Au = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x,u,Xu)X_iX_ju + B(x,u,Xu) = 0,$$

则我们可以用 Bony 的仿微分算子将它线性化. 如果经过仿线性化后的方程适合 Hörmander 条件，则 A 仍然是亚椭圆算子.

退化椭圆算子的研究需要对拟微分算子作一个推广，就是应用另一种算子演算(后来 Hörmander 称之为 Weyl 演算). 定义拟微分算子形如

$$a^w(x,D)u = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\,dy\,d\xi.$$

提出这种算子是为了量子力学的需要，因为它对 x 与 y 有明显的对称性，如果 $a(\cdot,\xi)$是实值函数，则 $a^w(x,D)$将是自伴算子，这当然使它在量子力学上特别方便，因为量子化的物理量都应该用自伴算子来表现. 它还有许多其他的优点，例如利用它来求逆，将可得到准确逆而非拟逆，等等.

J.-M. Bony 与 N. Lerner [B-L]在非线性微局部分析中引入 Weyl 演算，是为了提出二次微局部化(以至高次微局部化)理论. 但是我们可以从另一个角度来看待它，即可发现它对退化椭圆算子乃至次椭圆性的研究是很有好处的. 为此，我们重新来看 Hörmander 的象征类 $S_{1,0}^m$，其中的元适合估计式

$$| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) | \leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},$$
$$\text{或} \leqslant C[(1+|\xi|^2)^{1/2}]^{m-|\alpha|}.$$

左方的向量场$\{\partial_x, \partial_\xi\}$构成 $T(T^*\Omega)$的一个“典则”的基底，与它对偶的 $T^*\Omega$ 上的度量是

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx_i^2 + d\xi_i^2).$$

这是 Euclid 度量. 如果我们改用另一个度量

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(dx_i^2 + \frac{d\xi_i^2}{1+|\xi|^2}\right),$$

则与它对偶的向量场是

$$\{\partial_x, \partial'_\xi\} = \{\partial_x, (1+|\xi|^2)^{1/2}\partial_\xi\}.$$

如果用这样的向量场，则 $S_{1,0}^m$的基本估计式成为

$$| \partial_x^\beta \partial_\xi'^\alpha a(x,\xi) | \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}.$$

同样，$S_{\rho,\delta}^m$类相应于度量

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} [(1+|\xi|^2)^{\delta} dx_i^2 + (1+|\xi|^2)^{-\rho} d\xi_i^2].$$

我们要注意，$|\xi|^2$ 是一个最典型的椭圆算子——Laplace 算子 $-\Delta$ 的象征. 从几何上看 Laplace 算子的特点是：对点 x 的均匀性以及各向同性，我们在本书中称为齐性(homogeneity)而与齐次函数的齐次相区别. 实际上，一致椭圆的二阶偏微分算子

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$$

即是系数充分规则，且存在两个正常数 $c>0$ 与 $C>0$ 使

$$c|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C|\xi|^2$$

成立的算子. 这个定义也是以 Laplace 算子的象征 $|\xi|$ 为标准的.

进一步我们看到 Sobolev 空间的定义也是以 Laplace 算子为基础的.

但是，退化的椭圆算子所对应的度量恰好是非齐性的(non-homogeneous). 所以，研究退化椭圆算子的一个途径就是找到一个适用的度量，并且应用 Weyl 演算，例如[Zh]中指出的(这里稍加改变)，对于

$$p(x,D) = D_{x_1}^2 + x_1^{2k} D_{x_2}^2,$$

相应的度量就是

$$ds^2 = M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{2/k} dx_1^2 + dx_2^2 + M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-2\delta(1-1/k)} d\xi_1^2 + \langle\xi\rangle^{-2} d\xi_2^2,$$

其中 $\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2$，$M(x,\xi) = \xi_1^2 + x_1^{2k}\xi_2^2 + \langle\xi\rangle^{2\delta}$，$\delta = (1+k)^{-1}$. 这样，次椭圆性的研究涉及一种新的几何. 其实，很早就有人看到了这一点，例如，A. Nagel, E. M. Stein 和 S. Wainger [N-S-W]. 我们不妨说将会有一种新的"次椭圆几何"，这当然都要等待今后的研究工作.

附带还要提到，R. Melrose [Mel1]曾从几何角度讨论过一般的边值问题，而与 Weyl 演算不同，后者需要的是余切丛上的度量.

至此，我们再回到引言开始时所说的"70 年代算法"问题，这是

C. Fefferman 在[Fe1]中说的. 这是一篇很重要的文章，主旨是讨论如何在余切丛 $T^*\Omega\backslash 0$ 中局部化，并用以将一个一般的拟微分算子对角化，由此解决了许多重要问题. 若与 Littlewood-Paley 比较，则 L-P 只是在 ξ 域中局部化. 同时在 x 域和 ξ 域中局部化是不可能的，因为这与量子物理的根本原理"测不准原理"矛盾. [Fe1]的标题即"测不准原理"，Weyl 演算中也提到测不准原理. 还应该提到现在引起人们极大关注的小波理论也是围绕着这个思想而来的，也可以说是一种"微局部"理论. 这样说来，"70 年代算法" 应该是指微局部分析的初创时期形成的理论，我们不妨称之为"经典的微局部分析"，后来的发展不妨称为"精密的微局部分析"(analyse microlocale precis). 本书的写法在第 1 章回顾了经典微局部分析，第 2 章介绍了精密微局部分析在当前发展中比较系统的基础，也就是本书所采用的 Bony 的仿微分算子理论. 然后依次介绍以上两个方面的工作，这些工作是我们这个工作集体感到兴趣的. 本书内容的来源有的是讨论班上的报告，有的是一些课程的讲义，当然还有我们自己的研究工作. 因此，应该向所有参加了讨论班的教师以及研究生们致谢，在此就不一一列名了.

关于本书的读法，我们作如下的建议：如果读者已经熟悉经典的拟微分算子理论，则第 1 章可以略去. 如果读者对非线性波有兴趣，可以直接读第 2,3,4 章以及第 7 章. 如果对椭圆方程和退化椭圆问题有兴趣，则可以只读第 2 章和第 5～7 章.

本书作者多年来得到国家自然科学基金的资助，特别是天元基金的偏微分方程一般理论项目以及同样名称的数学重大项目的支持. 作者们还分别得到了自然科学基金青年基金、国家教委博士点基金及留学回国人员基金、霍英东教育基金的支持. 本书可以看做是天元项目部分工作的总结，因此，它不仅是作者三人的工作，也是参与了这些研究的同志们的共同的成果.

齐 民 友

1993 年 9 月于武汉珞珈山

第 1 章　经典的拟微分算子理论

20 世纪 60 年代中出现拟微分算子(以下简记为 PsDO)理论是适应当时对椭圆算子作深入讨论的需要. 在许多问题(例如 Atiyah-Singer 指标定理)的研究中需要对椭圆算子作某种"变形", 于是要求对椭圆算子作某些推广而保留其基本性质(例如演算性质——算子的复合、伴算子以及基本解的构造等). 这就是拟微分算子的直接来源. 现在, 这一理论——我们不妨称之为经典的 PsDO 理论——已成了微局部分析的基础. 本章的目的是对它作一个简要的回顾以适合以下各章的需要. 读者如果已有一些微局部分析的基础, 且想进一步地了解, 最好的方法是攻读经典名著 L. Hörmander [Hö2]第三卷. 比较容易接受的入门书可以举齐民友[Qi]或 J. Chazarain 与 A. Piriou [Ch-P]. G. B. Folland [Fol]则是一个篇幅较小而又适用的介绍.

从形式上来看一个线性偏微分算子(以下简称为 PDO)

$$P(x,\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.0.1}$$

可以对应于一个多项式

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{1.0.2}$$

这个对应可以借助于 Fourier 变换来实现: 即对 $u(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$有

$$P(x,\mathrm{D})u = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}P(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

$P(x,\xi)$称为 $P(x,\mathrm{D})$之象征, 其主部 $P_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$ 称为其主象征, 求 $P(x,\mathrm{D})$之在 x_0 附近的局部基本解 E 的经典方法是将 $P(x,\mathrm{D})$之系数"冻结"在 x_0 点, 然后将 E 展为一个收敛的级

数. 但用这个方法不便讨论 E 之奇性，因而可以如下进行. 令

$$a(x,\xi)=\frac{1}{P(x,\xi)},\quad |\xi| \text{ 充分大}$$

(当$|\xi|$充分大时，因为 $P(x,\xi)\sim P_m(x,\xi)\neq 0$，故 $a(x,\xi)$是有定义的). 作为 E 的近似表示，我们作算子

$$(Af)(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,\quad f\in\mathscr{S}.$$

于是，利用推广的 Leibnitz 公式，

$$\begin{aligned}P(x,D)(e^{i\xi x}a(x,\xi)) &= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,D)e^{ix\xi}\cdot D_x^\alpha a(x,\xi)\\ &= e^{i\xi x}\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\cdot D_x^\alpha a(x,\xi)\\ &= e^{i\xi x}P(x,\xi+D)a(x,\xi).\end{aligned}\qquad(1.0.3)$$

所以

$$P(x,D)Af(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}P(x,\xi+D)a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

但由(1.0.3)，

$$\begin{aligned}P(x,\xi+D)a(x,\xi) &= P(x,\xi)a(x,\xi)+\sum_{\alpha\neq 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)D_x^\alpha a(x,\xi)\\ &=1+O(|\xi|^{-1}),\quad |\xi|\text{充分大},\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}P(x,D)Af(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}(1+O(|\xi|^{-1}))\hat{f}(\xi)d\xi\\ &= f(x)+Rf(x)\end{aligned}\qquad(1.0.4)$$

或写为 $PA=I+R$，因此至少形式上有 $P\circ A(I+R)^{-1}=I$，而

$$(I+R)^{-1}=I-R+R^2+\cdots.\qquad(1.0.5)$$

于是 A 在某种意义上说是 P 之逆，称为拟逆或拟基本解.

上面的讨论有两点值得注意. 首先，它把 ξ 视为与 x 同等重要的变元而不只是形式上表示 D，这正是微局部分析的主要思想. 其次，(1.0.5)目前还只是一个形式的展开式，而没有定义其收敛性. 而且我们的讨论将在 C^∞ 框架内进行，这时适用于解析函数类的 Taylor 级数不一定收敛，即 Taylor 公式的余项不一定一致地趋向 0.

因此我们需要一种“渐近展开”以代替 Taylor 展开式，而其中余项的讨论将起重要作用. 这一点无论在本章或以下各章均极为重要.

至此我们可以定义拟微分算子如下：

$$(Au)(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.\qquad(1.0.6)$$

关于 $a(x,\xi)$之光滑性以及增长限制将在下文讨论，u 则暂时规定为在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$中. $a(x,\xi)$称为 A 之象征.

1.1 象征的类

以下我们恒设 $a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$而且存在一个实数 m 使当$|\xi|$充分大时，$a(x,\xi)\sim|\xi|^m$. 有时，例如在讨论边值问题时，需规定 $x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega$ 是一开集，这时可以规定 $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$. 至于 $u(x)$在某个广义函数空间的情况可以通过算子 A 之对偶来定义.

定义 1.1.1 对于 $m\in\mathbf{R}$，$0\leqslant\rho,\delta\leqslant 1$，我们定义象征 $a(x,\xi)$之类 $S_{\rho,\delta}^m$由适合以下条件的 $a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$构成：$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$，$\exists C=C(\alpha,\beta)>0$，使得

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.\qquad(1.1.1)$$

如果限于 $x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$，则应规定 $a(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$，且对 Ω 之任一紧子集 K，上述的 $C(\alpha,\beta)$还依赖于 K：$C=C(\alpha,\beta,K)$，而(1.1.1)对 $x\in K$，$\xi\in\mathbf{R}^n$ 成立，这时 $S_{\rho,\delta}^m$记作 $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$.

我们还规定

$$S_{\rho,\delta}^{-\infty}=\bigcap_m S_{\rho,\delta}^m;\quad S_{\rho,\delta}^{\infty}=\bigcup_m S_{\rho,\delta}^m.$$

$S_{\rho,\delta}^m$称为 Hörmander 象征类. 经典的 PsDO 相应于 $\rho=1$，$\delta=0$ 的情况. 故 $S_{1,0}^m$是很常见的，记作 S^m. 但在以下的算子演算中，ρ,δ 之取值至关重要. 下面的结果仅对 $0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$ 时成立，而例如想要推广(1.0.6)到更广泛的 $u(x)$时，可能只需要 $\rho>0$，$\delta<1$；要在微分流形上定义 PsDO 时需要 $0\leqslant 1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，等等. 但特别在处理非线性问题时要考虑 $S_{1,1}^m$. 这是一个“坏”类. 因此以下应特别注意关于 ρ,δ 的规定.

现在将有关 $S^m_{\rho,\delta}$的简单结果集中在一个定理中.

定理 1.1.2 1) *若 $m_1\leqslant m_2$，则 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}\subset S^{m_1}_{\rho,\delta}\subset S^{m_2}_{\rho,\delta}\subset S^{\infty}_{\rho,\delta}$.*

2) *若 $a_i\in S^{m_i}_{\rho_i,\delta_i}$，$i=1,2$，则 $a_1a_2\in S^m_{\rho,\delta}$，其中 $m=m_1+m_2$，$\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}$，$\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}$.*

3) *若 $a\in S^m_{\rho,\delta}$，则 $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}$.*

4) *若 $\exists R>0$ 使当 $|\xi|>R$ 时 $a(x,\xi)\equiv 0$，则 $a\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$.*

证明是自明的. 值得注意的是 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 的作用. 由 2)，$S^m_{\rho,\delta}$对于通常的乘法(下面还要介绍另一种"乘法")是一个代数，而 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 则是它的一个理想，因此可以考虑一个子代数 $S^m_{\rho,\delta}/S^{-\infty}_{\rho,\delta}$，其元是 $S^m_{\rho,\delta}$之元的等价类. 对 $a,b\in S^m_{\rho,\delta}$我们称$a\sim b$，当且仅当 $a-b\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$. 等价的象征定义实质上是相同的 PsDO. 例如，如果取一函数 $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$使当$|\xi|\leqslant R$ 时 $\chi(\xi)\equiv 0$，$|\xi|\geqslant 2R$ 时 $\chi(\xi)\equiv 1$，容易看到 $\chi(\xi)\in S^0_{\rho,\delta}$，因此 $b(x,\xi)=\chi(\xi)a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$，但当$|\xi|\geqslant 2R$ 时 $a(x,\xi)-b(x,\xi)\equiv 0$，所以由 4)，$a(x,\xi)-b(x,\xi)\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 而$a\sim b$. 正是由于这个原因，在定义象征时，时常将(1.1.1)式改为"当$|\xi|$充分大时成立". 特别是在 $m<0$，或在 $a(x,\xi)\sim 1/|\xi|^m$ 时需要这样作以避免 $\xi=0$ 时可能出现的奇性. 在下面讨论象征的渐近展开时，这个概念十分重要.

对 $S^m_{\rho,\delta}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$可赋以一种拓扑使成 Fréchet 空间：对于固定的 $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$(在 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$的情况下还要固定 Ω 的某一紧子集 K)，令

$$p_{\alpha,\beta}(a)=\sup_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\left|\frac{\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}}\right| \tag{1.1.2}$$

$$\left(\text{或 } p_{\alpha,\beta,K}(a)=\sup_{K\times\mathbf{R}^n}\left|\frac{\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}}\right|\right),$$

它是 $S^m_{\rho,\delta}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$的一个半范(对 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$，当 $K_1\subset K_2$ 时 $p_{\alpha,\beta,K_1}(a)\leqslant p_{\alpha,\beta,K_2}(a)$). 对于一切 $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$(以及对 Ω 的一个上升的穷竭紧子集序列 $K_1\subset\cdots\subset K_{i-1}\subset K_i\subset\cdots\to K$)，可得可数个半范. 容易验证，$S^m_{\rho,\delta}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$对这一族半范是完备的. 因此，$S^m_{\rho,\delta}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$成一个 Fréchet 空间. 以后凡讲到象征空间时，总是指的已具有这个拓扑.

在此拓扑下可以定义 $S^m_{\rho,\delta}$中的有界集如下：$M\subset S^m_{\rho,\delta}$称为有界的，是指对一切半范 $p_{\alpha,\beta}$(或 $p_{\alpha,\beta,K}$) 必存在常数 $C_{\alpha,\beta}>0$ (或 $C_{\alpha,\beta,K}>0$)，使对 M 中任意元 a，均有

$$p_{\alpha,\beta}(a)\leqslant C_{\alpha,\beta}\quad(\text{或 } p_{\alpha,\beta,K}(a)\leqslant C_{\alpha,\beta,K}).$$

在此拓扑下，我们有下面的逼近定理.

定理 1.1.3 *设 $a\in S^m_{\rho,\delta}$，$\chi_0(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，且在 $\xi=0$ 的某个邻域(例如$|\xi|<1$)中有 $\chi(\xi)=1$. 令 $\chi_j(\xi)=\chi_0(\xi/j)$，则 $a_j=\chi_j a\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$，而且对任意 $m'>m$，在 $S^{m'}_{\rho,\delta}(\Omega)$的拓扑中 $a_j\to a$.*

证 $a_j\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 是自明的. 任给一个 $\varepsilon>0$，并取 $S^{m'}_{\rho,\delta}$之任一半范 $p_{\alpha,\beta}$，因为当$|\xi|<j$ 时$\chi(\xi/j)=1$ 而有 $a_j-a=(\chi(\xi/j)-1)a=0$，所以当 j 充分大时

$$\begin{aligned}p_{\alpha,\beta}(a_j-a)&=\frac{\sup|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(\chi(\xi/j)-1)a(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^{m'-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}}\\&\leqslant\frac{C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}}{(1+|\xi|)^{m'-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}}\\&\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+j)^{m-m'}<\varepsilon.\end{aligned}$$

这就是 $a_j\to a$ 于 $S^{m'}_{\rho,\delta}$中.

在本章开始时就已经指出，渐近展开是一个重要概念. 现在详细说明这一点.

定义 1.1.4 *设有一个象征序列 $a_j(x,\xi)\in S^{m_j}_{\rho,\delta}(\Omega)$且 m_j 严格下降趋于$-\infty$. 如果存在严格下降的常数序列 $\mu_j\downarrow-\infty$，以及 $a(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$，使得*

$$a(x,\xi)-\sum_{m_j>\mu_k}a_j(x,\xi)\in S^{\mu_k}_{\rho,\delta}(\Omega), \tag{1.1.3}$$

则称 a 具有渐近展开式 $\sum_j a_j$，记作 $a\sim\sum_j a_j$.

注意，$S^m_{\rho,\delta}/S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 中每一个等价类中各个元均有相同的渐近展开式. 因此使用渐近展开式(1.1.3)与其说是表示一个象征，不如说是表示象征的一个等价类. 这一事实与 C^∞ 函数的 Taylor 展开式的一个显著特点相应：有这样的在 $x=0$ 附近非零的 C^∞ 函数，其在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式为 0，例如 e^{-1/x^2}. 因此 C^∞ 函数 $f(x)$与

$f(x)+Ce^{-1/x^2}$ 在 $x=0$ 处具有完全相同的 Taylor 展开式. 事实上，上述渐近展开式在 PsDO 理论中正起到 Taylor 展开式的作用.

关于渐近展开式的存在性，我们有

定理 1.1.5 *设有$\{a_j(x,\xi)\}$如定义 1.1.4 中所述，则必存在 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$，$m=m_1$，使 $a\sim\sum_j a_j$. a 在等价关系 $a\sim b$ 意义下是唯一的.*

证 唯一性的证明如上述. 为证明 a 的存在，取 $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$使 $\chi(\xi)=0$ 于$|\xi|\leqslant 1/2$ 处，$\chi(\xi)=1$ 于$|\xi|\geqslant 1$ 处. 取严格上升的正数序列 $t_j\uparrow+\infty$以及 Ω 的上升穷竭紧集序列 K_j 使得对于 $(x,\xi)\in K_l\times\mathbf{R}^n$ 有

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(\chi(\xi/t_j)a_j(x,\xi))|\leqslant 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\tag{1.1.4}$$

这里 j 充分大使得$|\alpha|+|\beta|+l\leqslant j$. t_j 的作法如下：先注意由于

$$\partial_\xi^\alpha\chi(\xi/t)=(\partial_\xi^\alpha\chi)(\xi/t)t^{-|\alpha|},$$

当$|\alpha|\neq 0$ 时可以取$|\xi|\leqslant t\leqslant 2|\xi|$，否则上式双方均为 0 ($\alpha=0$ 时，上式自然成立). 故必有与 t 无关的常数 C_α(例如取为 $\sup|\partial_\xi^\alpha\chi|$)，使对一切 ξ 均有

$$|\partial_\xi^\alpha\chi(\xi/t)|\leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\tag{1.1.5}$$

即是说，$\chi(\xi/t)$对 t 一致地属于 $S^0_{1,0}$. 由此可知，当$(x,\xi)\in K_l\times\mathbf{R}^n$ 而 j 充分大使$|\alpha|+|\beta|+l\leqslant j$ 时，

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(\chi(\xi/t_j)a_j(x,\xi))|&\leqslant C_j(1+|\xi|)^{m_j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\\&\leqslant C_j(1+|\xi|)^{m_j-m_{j-1}}(1+|\xi|)^{m_{j-1}-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.\end{aligned}$$

但此式中可以令$|\xi|\geqslant t_j/2$，由于 $m_j-m_{j-1}<0$，故当 t_j 充分大时即可使(1.1.4)成立.

于是我们令

$$a(x,\xi)=\sum_j\chi(\xi/t_j)a_j(x,\xi).\tag{1.1.6}$$

这个级数确实是收敛的. 因为固定一点(x_0,ξ_0)时只要 j 充分大即有 $|\xi_0/t_j|\leqslant 1/2$ 而 $\chi(\xi_0/t_j)=0$，因此上式其实是有限和. 于是利用 $x\in K_j$ 而 K_j 为紧集即知(1.1.6)所定义的 $a(x,\xi)\in S^{m_1}_{\rho,\delta}$.

再看

$$a-\sum_{j\leqslant k}a_j=\sum_{j\leqslant k}(\chi(\xi/t_j)-1)a_j+\sum_{j\geqslant k+1}\chi(\xi/t_j)a_j.$$

前一项中的 t_j 只有有限多个，而当$|\xi|$充分大时，可以使$|\xi/t_j|\geqslant 1$，$j=1,2,\cdots,k$ 而 $\chi(\xi/t_j)-1=0$，所以它属于 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$. 对于第二项利用(1.1.4)以及 $\sum_{j\geqslant k+1}2^{-j}$ 的收敛性可知

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sum_{j\geqslant k+1}\chi(\xi/t_j)a_j|\leqslant C(1+|\xi|)^{m_k-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

由此，定理得证.

但这个定理应用不甚方便，因为需要估计 $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(a-\sum_{j\leqslant k}a_j)$. 作为它的代替，我们还有

定理 1.1.6 *设有$\{a_j(x,\xi)\}$如定理 1.1.5 所述，而且存在 $a(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$，以及对 Ω 之任一紧子集 K 与 $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$ 均存在常数 μ 和 C 使得*

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^\mu,$$

且有严格下降的常数序列 $\mu_j\downarrow-\infty$和常数 C_l 使

$$|a(x,\xi)-\sum_{j\leqslant l-1}a_j(x,\xi)|\leqslant C_l(1+|\xi|)^{\mu_l},\tag{1.1.7}$$

则必有 $a\sim\sum_j a_j$.

这个定理的证明从略.

一种特别重要的情况是 $a_j(x,\xi)$是 ξ 的 $m-j$ 阶正齐次函数. 这时 $m_j=\mu_j=m-j$ 自然是严格下降趋于$-\infty$的. 这时 $a_0(x,\xi)$是渐近展开式的 m 次项，称为 $a(x,\xi)$的主象征. 它相当于偏微分算子的主部. 主象征理论在 1.4 节将要详述.

1.2 拟微分算子的基本性质

以下恒设 $0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$，$a\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$. PsDO

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\tag{1.2.1}$$

对于 $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$是有定义的. 因为 $C_0^\infty(\Omega)\subset\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, 所以 $\hat{u}(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$而积分(1.2.1)是绝对收敛的. 相应于象征类 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$的PsDO 类记作 $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$. 我们有

定理 1.2.1 *设 $A\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$, 则 A: $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$是连续映射. 若 $\delta<1$, 则 A 可以延拓为从 $\mathscr{E}'(\Omega)$到 $\mathscr{D}'(\Omega)$的连续映射.*

证 由(1.2.1), 因为 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, 故它对 x 和 ξ 的任意阶微商均对 ξ 有多项式阶的增长, 而 $\hat{u}(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$对 ξ 是急减的, 所以(1.2.1)可以在积分号下对 x 微分任意次, 而知 $Au(x)\in C^\infty(\Omega)$. 今证此映射是连续的. 为此, 任取一紧集 $K\subset\subset\Omega$, 以及 $\beta\in\mathbf{N}^n$, 并考虑 $Au(x)$在 $C^\infty(\Omega)$内之半范$\sup\limits_K|\partial_x^\beta Au(x)|$, 我们有

$$\sup_K|\partial_x^\beta Au(x)|\leqslant C(\beta,K)\int(1+|\xi|)^{m+\delta|\beta|}|\hat{u}(\xi)|\mathrm{d}\xi.$$

取 $k>n$ 使适合 $m+\delta|\beta|+k=2k'\in\mathbf{N}$, 则有

$$\begin{aligned}&\sup_K|\partial_x^\beta Au(x)|\\&\quad\leqslant C(\beta,K)\int(1+|\xi|)^{2k'}|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|)^{-k}\mathrm{d}\xi\\&\quad\leqslant C(\beta,K)\sup|(1+|\xi|)^{2k'}\hat{u}(\xi)|\\&\quad\leqslant C\sup_{\operatorname{supp}u}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 2k'}|\partial^\alpha u(x)|\Big).\end{aligned}$$

由此不等式易见, A: $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$是连续的.

为了证明 A 可以延拓为由 $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$的连续映射, 注意到 $Au(x)\in C^\infty(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$, 故取任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle Au,\varphi\rangle=\int_\Omega Au(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

是有定义的, 将 $Au(x)$之表达式(1.2.1)代入, 并应用 Fubini 定理, 知

$$\langle Au,\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int_\Omega\hat{u}(\xi)\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}a(x,\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\xi.\quad(1.2.2)$$

今证此式可以推广到 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$的情况, 事实上, 记

$$\tilde{A}\varphi(\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}a(x,\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

由于 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 利用积分号下求微商即知 $\tilde{A}\varphi(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 不仅如此, $\tilde{A}\varphi(\xi)$及其各阶微商对 ξ 还是急减的, 事实上对任意的 $\beta\in\mathbf{N}^n$,

$$\begin{aligned}|\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\tilde{A}\varphi(\xi)|&=\Big|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}C_\alpha^\gamma(\mathrm{i})^{-|\beta|}\int\partial_x^\beta\partial_\xi^{\alpha-\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\cdot\partial_\xi^\gamma a(x,\xi)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x\Big|\\&=\Big|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}C_\alpha^\gamma(\mathrm{i})^{-|\beta|}\int(\mathrm{i}x)^{\alpha-\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma(a(x,\xi)\varphi(x))\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant C(1+|\xi|)^{m+\delta|\beta|}.\end{aligned}$$

这里应用了分部积分以及 $\varphi(x)$具有紧支集, 因此积分实际上是在一紧集上进行从而$|\mathrm{i}x|^{\alpha-\gamma}$在其上有界. 因此又有

$$|\partial_\xi^\alpha\tilde{A}\varphi(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m+(\delta-1)|\beta|}.$$

因为 $\delta<1$, 而$|\beta|$是任意的, 故知 $\tilde{A}\varphi(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

现证(1.2.1)可以推广到 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$的情况. 因为当 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$时, $\hat{u}(\xi)$是缓增的光滑函数, 从而(1.2.1)右端有定义即可以为左端之定义. 现证左端这样对 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$定义后, 成为$\mathscr{D}(\Omega)$上之连续线性泛函, 从而 Au 可以认为是 $\mathscr{D}'(\Omega)$中之元. 为此, 用 u 的一个磨光序列去逼近 u, 即作 $u_j\in C_0^\infty(\Omega)$使 $u_j\to u$ (在 $\mathscr{E}'$中), 于是 $\hat{u}_j\to\hat{u}$ (在 $\mathscr{S}'$中). 事实是, 以 u_j 代入(1.2.1)中, 有

$$\langle Au_j,\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\langle\hat{u}_j,\tilde{A}\varphi\rangle\to(2\pi)^{-n}\langle\hat{u},\tilde{A}\varphi\rangle=\langle Au,\varphi\rangle.$$

上式左方对一切 j 均为 $\mathscr{D}(\Omega)$ $(\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$上之连续线性泛函, 故由共鸣定理知, 其右方之 Au 也是, 即 $Au\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

现已证明 Au 可以延拓到 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$的情况, 而且 $Au\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 即 A: $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$. 余下的是要证明延拓以后的 A 仍是连续的. 但这是清楚的, 因为我们有

$$\mathscr{E}'(\Omega)\overset{i_1}{\subset}\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)\overset{i_2}{\subset}\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)\overset{\mathscr{F}}{\subset}\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)\overset{S}{\subset}\mathbf{C}.$$

这里 i_1,i_2 表示自然地嵌入, $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换, S 则表示 $\hat{u}\to(2\pi)^{-n}\langle\hat{u},\tilde{A}\varphi\rangle$. 于是(1.2.1)式可以写成(对于 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$)

$$A=S\circ\mathscr{F}\circ i_2\circ i_1.\quad(1.2.3)$$

于是 A: $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$是连续映射, 证毕.

以下凡不加说明时均认为 PsDO A 已延拓到 $\mathscr{E}'(\Omega)$上, 而且仍

用(1.0.6)形式地表示. 但 A 只能将 $C_0^\infty(\Omega)$ (或 $\mathscr{E}'(\Omega)$)映到 $C^\infty(\Omega)$ (或 $\mathscr{D}'(\Omega)$)，而不能仍映到 $C_0^\infty(\Omega)$ (或 $\mathscr{E}'(\Omega)$)之内，这样，在讨论算子的复合时将会遇到困难. 为了解决这个困难及其他问题，我们需要从更一般的角度来讨论它，即应用 Schwartz 的核定理.

先将(1.0.6)中的 $\hat{u}(\xi)$ 仍写为 $\hat{u}(\xi)=\int e^{-i\xi y}u(y)dy$，并且再取 $v(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，则

$$\langle Au,v\rangle=(2\pi)^{-n}\iiint e^{i\xi(x-y)}a(x,\xi)u(y)v(x)dyd\xi dx. \tag{1.2.4}$$

Schwartz 核定理可以表述如下：

定理 1.2.2 *设 H: $C_0^\infty(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$ 是一连续映射，则必存在一个广义函数 $K(x,y)\in\mathscr{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$，使得对于 $u,v\in\mathscr{D}(\Omega)$ 有*

$$\langle Hu,v\rangle=\langle K,u(y)\otimes v(x)\rangle. \tag{1.2.5}$$

这个定理的证明可以参看上文所引的文献. 现将它应用于 PsDO，即令 $H=A$，即可得到一个广义函数 $A(x,y)\in\mathscr{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$，使得可以形式地写出

$$\langle Au,v\rangle=\iint A(x,y)u(y)v(x)dydx. \tag{1.2.6}$$

$A(x,y)$称为 PsDO A 的广义函数核，而且可以形式地将它写作

$$A(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi(x-y)}a(x,\xi)d\xi. \tag{1.2.7}$$

我们要来讨论 $A(x,y)$的奇性，并将证明 $A(x,y)$的奇支集是 $\Omega_x\times\Omega_y$ 的对角线集 $\Delta=\{(x,x);\ x\in\Omega_x\}$. 我们有

定理 1.2.3 *以 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 为象征的 PsDO A 的广义函数核 $A(x,y)$在$(\Omega_x\times\Omega_y)\backslash\Delta$ 上为 C^∞ 的. 更确切地说，若对 $j\in\mathbf{N}$ 有 $m-(\rho|\alpha|-j)<-n$，则*

$$(x-y)^\alpha A(x,y)\in C^j(\Omega_x\times\Omega_y).$$

证 取 $w(x,y)\in C_0^\infty(\Omega_x\times\Omega_y)$. 现在来计算$\langle(x-y)^\alpha A,w\rangle$如下：由(1.2.4)，

$$\langle(x-y)^\alpha A,w\rangle=(2\pi)^{-n}\iiint e^{i\xi(x-y)}(x-y)^\alpha a(x,\xi)w(x,y)dyd\xi dx$$

$$=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi x}a(x,\xi)\cdot\int e^{-i\xi y}(x-y)^\alpha w(x,y)dy\cdot d\xi dx$$

$$=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi x}a(x,\xi)(x-D_\xi)^\alpha\hat{w}_2(x,\xi)d\xi dx$$

$$=(2\pi)^{-n}\iint \hat{w}_2(x,\xi)(x-D_\xi)^\alpha\{e^{i\xi x}a(x,\xi)\}d\xi dx.$$

这里 $\hat{w}_2(x,\xi)$表示 $w(x,y)$对第二个变元 y 的 Fourier 变换，而最后一步则利用了分部积分. 由 Leibniz 公式，有

$$(x+D_\xi)^\alpha\{e^{i\xi x}a(x,\xi)\}=[(-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)]e^{i\xi x}.$$

代入上式，并将 $\hat{w}_2(x,\xi)$恢复为 $w(x,y)$有

$$\langle(x-y)^\alpha A,w\rangle$$

$$=(2\pi)^{-n}\iiint w(x,y)e^{i\xi(x-y)}(-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)dyd\xi dx.$$

$$=\iint w(x,y)\Big[(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi(x-y)}(-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)d\xi\Big]dydx.$$

这里我们注意到当 $x\in\Pi_x\operatorname{supp}w(x,y)$ (这是一个紧集)时

$$|(-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|},$$

而 $w(x,y)$在 $\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_y$ 中有紧支集，从而上面的积分绝对收敛，再用 Fubini 定理即得上式. 由此可得

$$(x-y)^\alpha A(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi(x-y)}(-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)d\xi. \tag{1.2.8}$$

右方的积分是绝对收敛的，而且可以在积分号下对 x,y 微分 j 次，只要 $m-(\rho|\alpha|-j)<-n$ 即可. 因此在对角线集 Δ 之外，$A(x,y)\in C^j$. 由于 α 是可以任选的，故实际上在 Δ 外 $A(x,y)\in C^\infty$.

广义函数核之奇支集在对角线集上，这是 PsDO 很重要的性质.

由此立即可得 PsDO 的拟局部性.

系 1.2.4 *设 $A\in\operatorname{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$，则 A 必有所谓拟局部性，即对 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$有*

$$\operatorname{sing\,supp}Au\subset\operatorname{sing\,supp}u. \tag{1.2.9}$$

证 设 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$. 令 V 为 sing supp u 的任一邻域. 作 $\varphi\in$

$C_0^\infty(V)$使在 sing supp u 上 $\varphi\equiv 1$. 于是

$$u=\varphi u+(1-\varphi)u=u_1+u_2,$$

这里 $u_2\in C_0^\infty(\Omega)$, 且 supp $u_1\subset V$. 所以 $Au_2\in C^\infty(\Omega)$, 而 $Au=Au_1+Au_2$, sing supp Au=sing supp Au_1. 但

$$Au_1(x)=\int A(x,y)u_1(y)\mathrm{d}y.$$

取一点 $x_0\notin V$, 则当 y 在 x_0 附近时有 $u_1(y)=0$. 所以当 x 在 x_0 附近时, 上面的积分是在 Δ 的某个邻域外进行, 从而 $A(x,y)$ 在积分域上属于 $C^\infty(\Omega_x\times\Omega_y)$. 因此 $Au_1(x)$ 当 x 在 x_0 附近时属于 C^∞. 由 V 的任意性知 Au_1 在 sing supp u 外属于 C^∞ 而系得证.

注 若一线性算子 A 使得

$$\text{supp } Au\subset \text{supp } u, \tag{1.2.10}$$

则称 A 具有局部性. 线性微分算子显然有局部性. J. Peetre 证明了, 凡有局部性的线性算子必为线性微分算子.

系 1.2.5 *若 $A\in \mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega))$, 则其广义函数核*

$$A(x,y)\in C^\infty(\Omega_x\times\Omega_y).$$

证 在定理 1.2.3 中取 $\alpha=0$ 即得.

系 1.2.6 *若 $A\in \mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega))$, 则 A 将 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 连续地映到 $C^\infty(\Omega)$ 内.*

证 由系 1.2.5 以及(1.2.6)式,

$$Au(x)=\int A(x,y)u(y)\mathrm{d}y=\langle u(\cdot),A(x,\cdot)\rangle.$$

显然上式右方属于 $C^\infty(\Omega)$. 连续性由广义函数的知识是明显的.

若一线性算子连续地映 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 到 $C^\infty(\Omega)$ 内则称之为一正则化算子, 所以上面我们证明了 $\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega))\subset${正则化算子}. 但实际上还有更进一步的结果:

定理 1.2.7

$$\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega))=\bigcap_m \mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\Omega))=\{\text{具有 } C^\infty \text{ 核的算子}\}$$
$$=\{\text{正则化算子}\}.$$

定理的证明见 p. 27.

在以下的讨论中, 我们将看到, 把一个正则化算子并入一个 PsDO 时常是方便的, 这就是说, 把 $\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\Omega))/\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega))$ 之一个等价类看成同一个 PsDO. 正如在象征的渐近展开中, 我们看到 $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)/S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega)$ 之每一个等价类中的一切元都有相同的渐近展开, 因此把一个等价类看成同一个象征. 这样形成了 PsDO 理论中很重要的两个原则:

1) *在算子水平上, 正则化算子是平凡的, 不足道的;*

2) *在象征水平上, $S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega)$ 象征是平凡的, 不足道的.*

这样, 在每一个等价类中可以选取一个对我们最为方便的 PsDO, 这就是恰当支的 PsDO.

定义 1.2.8 *$\Omega_x\times\Omega_y$ 的子集 C 称为恰当的, 如果对 Ω 的任一紧子集 K, $\Pi_x^{-1}(K)\cap C$ 与 $\Pi_y^{-1}(K)\cap C$ 均为 $\Omega_x\times\Omega_y$ 的紧子集. 这里 Π_x, Π_y 为投影算子:*

$$\Pi_x: \Omega_x\times\Omega_y\to\Omega_x,\ (x,y)\to x;$$
$$\Pi_y: \Omega_x\times\Omega_y\to\Omega_y,\ (x,y)\to y.$$

设一线性算子 A 具有广义函数核 $A(x,y)$, 而 supp $A(x,y)$ 是 $\Omega_x\times\Omega_y$ 的恰当子集, 则称 A 为恰当支的. 对恰当支算子 A 有

定理 1.2.9 *若 A: $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 是恰当支的, 则必有 A: $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$. 而且 A 可以延拓为一从 $C^\infty(\Omega)$ 到 $C^\infty(\Omega)$ 的连续映射.*

证 仍用 $A(x,y)$ 表示 A 的广义函数核, 则

$$Au(x)=\int A(x,y)u(y)\mathrm{d}y=\langle A(x,\cdot),u(\cdot)\rangle.$$

此式只在 Π_y^{-1}supp u 与 supp A 有非空交集时才可能不为 0, 故上式中的 x 必须适合 $x\in\Pi_x(\Pi_y^{-1}\text{supp } u\cap\text{supp } A)$. 但由定义 1.2.8, Π_y^{-1}supp $u\cap$supp A 为紧, 故 $\Pi_x(\Pi_y^{-1}\text{supp } u\cap\text{supp } A)$ 也为紧. 上面所说的就是: supp Au 必在此紧集中, 因此 $Au\in C_0^\infty(\Omega)$.

用同样的推理可知, 任取紧集 $K_1\subset\subset\Omega_x$, 必存在另一紧集 $K_2\subset\subset\Omega_y$ 使 $Au(x)$ 在 K_1 上之值只与 u 在 K_2 上之值有关. 事实上, $K_2=\Pi_x(\Pi_y^{-1}K_1\cap\text{supp } A)$. 由此知 Au 可以延拓到 $u\in C^\infty(\Omega)$

上，因为任取 $K_1 \subset\subset \Omega$ 作 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 使在相应于 K_1 的 K_2 上 $\varphi \equiv 1$，则可以定义

$$Au|_{K_1} = A(\varphi u)|_{K_1}.$$

这个定义显然与 φ 之取法无关，且若取另一个 K_1，记为 K_1'，$Au|_{K_1}$ 在 $K_1 \cap K_1'$ 与 $Au|_{K_1'}$ 在 $K_1 \cap K_1'$ 上之值相同. 由 K_1 之任意性知 Au 在 $C^\infty(\Omega)$ 上有定义，且 $A: C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ 为连续.

把这个结果用到 PsDO 上，如果 PsDO A 是恰当支的，则不但有 $A: C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ 为连续的，延拓为 $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ 仍为连续的且由对偶关系，还可进一步将 A 延拓为连续映射 $\mathscr{E}'(\Omega) \to \mathscr{E}'(\Omega)$，$\mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$. 问题在于 PsDO 何时是恰当支的? 这里有重要的

定理 1.2.10 *任一个 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 必可写成*

$$A = A_1 + R,$$

这里 $A_1 \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 是恰当支的，而 R 是正则化算子.

这个定理的证明需要用到象征概念的一点推广，具体可见 p. 28.

以上略去的几个定理证明均可利用重象征理论证明. 对此可以参看前述文献.

有了定理 1.2.10，前面提出的例如算子复合的困难就有可能解决了. 因为现在至少 $A, B: C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$，所以 $A \circ B$ 或 $B \circ A$ 有可能定义.

1.3 波 前 集

微局部分析的基本思想既是将 x 与 ξ 放在相同的地位进行研究，则在讨论广义函数 $u(x)$ 的奇性时，既需要讨论其在 x 空间的位置，即讨论 sing supp u，又要讨论 $\hat{u}(\xi)$（如果允许作 Fourier 变换）的奇性. 这里的奇性是指发生在某个方向 ξ_0（这是一个余切向量）上的奇性. 这时奇性是以 $\mathscr{S}$ 空间为准的，其原因如下. 设 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$（以下凡 PsDO 均指恰当支 PsDO）. 则若 $u \in \mathscr{D}'$ 在 x_0 附近属于 C^∞，

可以用一个支集含于 x_0 的某个邻域中的 C_0^∞ 函数 $\varphi(x)$，$\varphi(x_0) \neq 0$ 去乘 $u(x)$ 而得 $\varphi u \in C_0^\infty(\Omega)$（这个步骤称为局部化），而 $A(\varphi u) \in C_0^\infty(\Omega)$. 这时，$(A(\varphi u))\hat{}(\xi) \in \mathscr{S}$ 而在一切 ξ 方向上均为急减的. 注意到令 A 为"乘以常数 1"也是一个 $\mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$ 类的 PsDO，我们可以讨论 $(\varphi u)\hat{}(\xi)$. 这样就得到基本的定义.

定义 1.3.1 1) *令 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 为一开集，$T^*\Omega \backslash 0$ 表示余切丛 $T^*\Omega$ 中除去零截面，用局部坐标表示为 $\{(x,\xi) \in T^*\Omega;\ \xi \neq 0\}$.*

2) *若对集合 $S \subset T^*\Omega \backslash 0$，有*

$$(x,\xi) \in S \Rightarrow (x, r\xi) \in S, \quad \forall r > 0,$$

则 S 称为锥形集.

3) *包含某广义函数 u 之支集 supp u 的最小锥形集称为 u 之锥形支集，记作 consupp u.*

为方便起见令 $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$，从而可将上面的乘子 φ 略去. 上面说到 $\hat{u}(\xi)$ 为急减，即指 $\forall m \in \mathbf{N}$，$\exists C_m > 0$，使

$$|\hat{u}(\xi)| \leqslant C_m(1+|\xi|)^{-m}. \tag{1.3.1}$$

$\hat{u}$ 在一个方向 $\xi_0 \neq 0$ 上非急减，即指有 ξ_0 的一个锥邻域 V，使 (1.3.1) 在 V 中不成立；亦即对某个 $\eta \in V$，必有某个常数 m_0 存在，使在 V 中

$$\hat{u}(\eta) \sim (1+|\eta|)^{m_0}. \tag{1.3.2}$$

这样的 ξ_0 不妨称为坏方向，并将其集记作 $\Sigma(u)$. 于是我们有

定理 1.3.2 *若 $u \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，则*

$$\Sigma(\varphi u) \subset \Sigma(u). \tag{1.3.3}$$

证 由 Fourier 变换的性质，

$$(\varphi u)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{1.3.4}$$

其中 $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$，而 u 因为有紧支集，故 $\hat{u}(\eta)$ 为缓增，即有 $M \in \mathbf{Z}_+$ 与常数 $C_M > 0$ 使

$$|\hat{u}(\eta)| \leqslant C_M(1+|\eta|)^M.$$

今设 $\hat{u}(\eta)$ 在某个锥 Γ 内急减，我们来证明 $(\varphi u)\hat{}$ 也是这样，则定理得证. 为此，取锥 $\Gamma_1 \subset\subset \Gamma$ 而将积分 (1.3.4) 分为两部分. 当 $\xi \in \Gamma_1$ 时

$$|(\varphi u)^{\wedge}(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n}\int_{\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|\,d\eta + (2\pi)^{-n}\int_{C\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|\,d\eta$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n}\int_{\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|\,d\eta + C\int_{C\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|)^M d\eta.$$

在第一个积分中$|\hat{u}(\eta)|$为急减，且由

$$1+|\xi| \leqslant (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|)$$

有

$$(1+|\eta|)^{-N} \leqslant (1+|\xi-\eta|)^N(1+|\xi|)^{-N},$$

对于$|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|$，则因$\hat{\varphi}$为急减，有$|\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \leqslant C(1+|\xi-\eta|)^{-2N}$，故

$$\int_{\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|\,d\eta$$

$$\leqslant C\int (1+|\xi-\eta|)^{-2N}(1+|\eta|)^{-N}d\eta$$

$$\leqslant C(1+|\xi|)^{-N}\int (1+|\xi-\eta|)^{-N}d\eta$$

$$\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N.$$

对于第二个积分，因为$\eta \in C\Gamma$，$\xi \in \Gamma_1$，所以$|\xi-\eta| \geqslant \varepsilon|\xi|$，$\varepsilon>0$是一常数，所以

$$|\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \leqslant C(1+|\xi-\eta|)^{-2k}$$

$$\leqslant C(1+|\xi|)^{-k}(1+|\xi-\eta|)^{-k}, \quad \forall k.$$

又一次利用前述不等式并将η与ξ互换：

$$1+|\eta| \leqslant (1+|\xi-\eta|)(1+|\xi|),$$

知

$$C_M\int_{C\Gamma} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|)^M d\eta$$

$$\leqslant C(1+|\xi|)^{-k+M}\int (1+|\xi-\eta|)^{-k+M}d\eta$$

$$\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N.$$

合并这两个积分即得定理之证.

利用一切支集在x_0附近的$C_0^\infty(\Omega)$函数$\varphi(x)$将u局部化，即可定义u在x_0的坏方向之集

$$\Sigma_{x_0}(u) = \bigcap_{\varphi} \Sigma(\varphi u). \tag{1.3.5}$$

很明显，$\Sigma_{x_0}(u)$是一个闭锥形集.

定理 1.3.3 任意取一个序列 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi_j(x_0) \neq 0$，且$\{\text{supp}\,\varphi_j\} \to \{x_0\}$，则

$$\Sigma_{x_0}(u) = \bigcap_{j} \Sigma(\varphi_j u). \tag{1.3.6}$$

证 因为$\{\text{supp}\,\varphi_j\} \to \{x_0\}$，故对任一个$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi(x_0) \neq 0$，必可在此序列中找到某个$\varphi_{j_0}$使$\text{supp}\,\varphi_{j_0} \subset\subset \text{supp}\,\varphi$，且$\varphi_{j_0}u = (\varphi_{j_0}/\varphi)(\varphi u)$，这里$\varphi_{j_0}/\varphi$是适当定义的，且属于$C_0^\infty(\Omega)$，于是由定理1.3.2，

$$\Sigma(\varphi_{j_0}u) = \Sigma[(\varphi_{j_0}/\varphi)(\varphi u)] \subset \Sigma(\varphi u).$$

因此

$$\Sigma_{x_0}(u) \subset \bigcap_{j} \Sigma(\varphi_j u) \subset \bigcap_{\varphi} \Sigma(\varphi u) = \Sigma_{x_0}(u).$$

而定理得证.

现在我们可以给出波前集的定义：

定义 1.3.4 *$u \in \mathscr{D}'(u)$之波前集$\mathrm{WF}(u)$是一闭锥形集，其定义为*

$$\mathrm{WF}(u) = \{(x,\xi) \in T^*\Omega\backslash 0;\ \xi \in \Sigma_x(u)\}. \tag{1.3.7}$$

由定义很明显有

定理 1.3.5 *波前集在x空间上之投影即为奇支集：*

$$\Pi_x \mathrm{WF}(u) = \text{sing supp}\,u, \quad u \in \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.3.8}$$

下面介绍波前集的一些基本性质.

定理 1.3.6 *设u_1, u_2, u均为$\mathscr{D}'(\Omega)$之元，$a(x) \in C^\infty(\Omega)$，则*

$$\mathrm{WF}(u_1+u_2) \subset \mathrm{WF}(u_1) \cup \mathrm{WF}(u_2).$$

$$\mathrm{WF}(a(x)u) \subset \mathrm{WF}(u).$$

$$\mathrm{WF}(D^\alpha u) \subset \mathrm{WF}(u).$$

证 1) 我们只需证明$\Sigma_x(u_1+u_2) \subset \Sigma_x(u_1) \cup \Sigma_x(u_2)$即可. 为

此可用反证法. 设 $\xi\notin\Sigma_x(u_1)\cup\Sigma_x(u_2)$, 由于右方是闭锥形集, 可以找到一个含 ξ 在内的锥形集 Γ 与右方不相交, 从而有某个 $\varphi\in C_0^\infty$ 使 $(\varphi u_1)\hat{}(\xi),(\varphi u_2)\hat{}(\xi)$ 均在 Γ 内急减. 因此 $(\varphi(u_1+u_2))\hat{}$ 在 Γ 中也急减, 即 $\xi\notin\Sigma\varphi(u_1+u_2)$, 当然也就有 $\xi\notin\Sigma_x(u_1+u_2)$. 于是 1)得证.

2) 由定理 1.3.2 知 $\Sigma(a\varphi u)\subset\Sigma(\varphi u)$, 因此

$$\bigcap_\varphi\Sigma(a\varphi u)\subset\bigcap_\varphi\Sigma(\varphi u).$$

即 $\Sigma_x(au)\subset\Sigma_x(u)$ 而 2)得证.

3) 取一个 $\chi\in C_0^\infty$ 而在 x 附近为 1, 又作 $\chi_1\in C_0^\infty$ 使在 $\operatorname{supp}\chi$ 附近 $\chi_1=1$. 于是有

$$\Sigma_x(\mathrm{D}^\alpha u)\subset\Sigma(\chi\mathrm{D}^\alpha u)=\Sigma(\chi\mathrm{D}^\alpha(\chi_1 u)).$$

现在 $\chi_1 u\in\mathscr{E}'(\Omega)$, 故 $\mathrm{D}^\alpha(\chi_1 u)\in\mathscr{E}'(\Omega)$, 而由定理 1.3.2,

$$\Sigma\chi(\mathrm{D}^\alpha\chi_1 u)\subset\Sigma\mathrm{D}^\alpha(\chi_1 u).$$

现在设 $\xi_0\notin\Sigma(\chi_1 u)$, 于是可以找到一个含 ξ_0 的开锥形集 Γ 使 $(\chi_1 u)\hat{}$ 在 Γ 中急减, 当然 $(\mathrm{D}^\alpha\chi_1 u)\hat{}=\xi^\alpha(\chi_1 u)\hat{}$ 在 Γ 中也急减, 所以 $\xi_0\notin\Sigma(\mathrm{D}^\alpha\chi_1 u)$. 这样又有 $\Sigma(\mathrm{D}^\alpha\chi_1 u)\subset\Sigma(\chi_1 u)$.

综合定理 1.3.6 之各点, 即有

定理 1.3.7 *若 $P(x,\mathrm{D})$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 系数的线性偏微分算子, 则对 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 有*

$$\mathrm{WF}(Pu)\subset\mathrm{WF}(u).\tag{1.3.9}$$

这个定理当然是拟局部性的精确化, 问题是 PsDO 是否也有这样的性质? 事实是:

定理 1.3.8 *若 $A\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 是一个恰当 PsDO. 于是对所有 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 有*

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\mathrm{WF}(u).\tag{1.3.10}$$

这个定理的证明放在后面(见定理 1.5.9). 现在我们进一步讨论 PsDO 与波前集的关系. 我们再一次强调, 凡谈到 PsDO $A\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$时, 对 ρ,δ 恒规定 $0<\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\delta<1$, 而且这里的 A 恒指恰当的 PsDO.

以上, 一个常用的技巧是用某个截断函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 去乘一个广义函数 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 借以实现局部化. 但这只是在余切丛的非零截面 $T^*\Omega\backslash 0$ 的底空间 Ω 上实现局部化. 微局部分析要求将底空间与纤维空间放在同等的地位上, 自然也要求在纤维空间(ξ 是其局部坐标)中实现局部化(不妨称为微局部化). 这一点可以用 ξ 空间的某个截断函数 $\chi(\xi)$ 去乘广义函数的 Fourier 变换以实现. 由于纤维空间中容许一个位似变换(homothetic)群, 所以应该要求 $\chi(\xi)$ 也适应这一特性, 即要求 $\chi(\xi)$ 对 ξ 是零阶(正)齐次函数:

$$\chi(t\xi)=\chi(\xi),\quad\forall t>0.$$

于是, 设有 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 若要在 $x_0\in\Omega$ 附近将 u 局部化, 应取 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 使 $\operatorname{supp}\varphi$ 在 x_0 附近, 而作 $\varphi u\in\mathscr{E}'(\Omega)$. 对于 φu 可作其 Fourier 变换 $(\varphi u)\hat{}(\xi)$, 这是一个缓增的 C^∞ 函数, 如果我们想要在 $\xi_0\in\mathbf{R}^n\backslash 0$ 附近局部化, 则可作 $\chi(\xi)$ 为一个零阶正齐性函数, 使其锥形支集(齐性函数的支集自然也是锥形集)在 ξ 附近, 然后作

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\chi(\xi)(\varphi u)\hat{}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

这就实现了微局部化. 这就是一个 PsDO. 但正齐性函数 $\chi(\xi)$ 必以 $\xi=0$ 为奇点, 而不可能是 C^∞ 的, 因此, 对 $\chi(\xi)$ 还要作一些修正, 即切去它在 $|\xi|\leqslant 1$ 中的部分. 总之, $\chi(\xi)$ 可以按以下方式作出: 先在单位球面 S^{n-1}: $|\eta|=1$ 上作 $C_0^\infty(S^{n-1})$ 函数 $\theta(\eta)$, 使其支集含于 $\eta_0=\xi_0/|\xi_0|$ 在 S^{n-1} 上的某个邻域中. 然后按零阶正齐次函数的要求将它拓展到单位球面 S^{n-1} 之外, 这就是作 $\theta(\xi/|\xi|)$. 这个函数在 $\xi=0$ 处不是光滑的, 因此最后再作一个 ξ 的 C^∞ 函数 $\psi(\xi)$ 使 $\psi(\xi)=0$ 于 $|\xi|<1/2$ 处, $\psi(\xi)=1$ 于 $|\xi|\geqslant 1$ 处,

$$\chi(\xi)=\psi(\xi)\theta(\xi/|\xi|)$$

即合于所求. 总之, 我们得出的 $\chi(\xi)$ 有以下性质:

1) *$\chi(\xi)\in C^\infty$ 且当 $|\xi|\geqslant 1$ 时是 ξ 的零阶正齐次函数, 即当 $t\geqslant 1$, $|\xi|\geqslant 1$ 时有 $\chi(t\xi)=\chi(\xi)$.*

2) *$\chi(\xi)$ 的锥形支集含于 ξ_0 的某个锥邻域内.*

3) *在 $\xi=0$ 附近 $\chi(\xi)\equiv 0$.*

这个重要的事实将在证明定理 1.5.6 时用到.

1.4 拟微分算子的代数

前面已讲过，$S^m_{\rho,\delta}$中ρ与δ的选择至关重要. 本章中恒令$0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$. 而在本节中还要进一步规定$\delta<\rho$，其理由以下自明. $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta})$类 PsDO 中的 A 定义为

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

这里暂时先设$u\in C_0^\infty(\Omega)$以避免积分收敛性的困难. 将

$$\hat{u}(\xi)=\int e^{-i\xi y}u(y)dy$$

代入上式至少形式地可以写出

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}a(x,\xi)u(y)dyd\xi. \tag{1.4.1}$$

由此式看到“象征”a 中只包含变元 x，这是不自然的. 因此我们不妨考虑更为一般的算子

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi. \tag{1.4.2}$$

它又是更广泛的振荡积分

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\Phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

之特例. 对于振荡积分我们称$\Phi(x,y,\xi)$为相函数，$a(x,y,\xi)$为振幅函数，振荡积分是 Fourier 积分算子理论的基础. 本书不打算涉及于此（读者可以参看本章开始时提出的参考文献），而是在讨论 PsDO 的代数时需要用到它，所以先对它给出基本的定义：

定义 1.4.1 若$a(x,y,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}^n)$且存在实数$m$，并对任意的$\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$，以及$\Omega$之任一紧子集$K$均有常数$C_{\alpha,\beta,K}>0$存在，使得当$(x,y)\in K\times K$时，

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_{x,y}^\beta a(x,y,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{1.4.3}$$

则称$a\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$，称为重象征.

算子(1.4.2)中的积分可能是发散的，我们需要给出使它“正则化”的方法. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}e^{i\xi(x-y)}=i(x_j-y_j)e^{i\xi(x-y)},\qquad \frac{\partial}{\partial y_j}e^{i\xi(x-y)}=-\xi_j,$$

所以

$$-i\Big[\sum_{j=1}^n|\xi|^2(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial\xi_j}-\xi_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big]e^{i\xi(x-y)}$$
$$=(1+|x-y|^2)|\xi|^2e^{i\xi(x-y)},$$

或

$$-i(1+|x-y|^2)^{-1}|\xi|^{-2}\Big[\sum_{j=1}^n|\xi|^2(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial\xi_j}-\xi_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big]e^{i\xi(x-y)}$$
$$=e^{i\xi(x-y)},$$

此式左方的系数当$\xi=0$时有奇性，所以我们再作函数$\chi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$使$\chi(\xi)=1$于$|\xi|\leqslant 1/2$时，$\chi(\xi)=0$于$|\xi|\geqslant 1$处. 用$1-\chi(\xi)$去乘上式，并记

$$\alpha_j(x,y,\xi)=-i(1+|x-y|^2)^{-1}|\xi|^{-2}(1-\chi(\xi))\cdot|\xi|^2(x_j-y_j),$$
$$\beta_j(x,y,\xi)=-i(1+|x-y|^2)^{-1}|\xi|^2(1-\chi(\xi))\xi_j,$$
$$\gamma(x,y,\xi)=\chi(\xi),$$

即得

$$^tLe^{i\xi(x-y)}=\Big[\sum_j\Big(\alpha_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\beta_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)+\gamma\Big]e^{i\xi(x-y)}$$
$$=e^{i\xi(x-y)}, \tag{1.4.4}$$

^tL 表示 L 的转置算子，所以

$$L\equiv\sum_j\Big[\frac{\partial}{\partial\xi_j}(-\alpha_j\ \cdot)+\frac{\partial}{\partial y_j}(-\beta_j\ \cdot)\Big]+\gamma. \tag{1.4.5}$$

这里$\alpha_j\in S^0(\Omega\times\Omega)$，$\beta_j\in S^{-1}(\Omega\times\Omega)$，$\gamma\in S^{-\infty}$，但我们也可认为$\gamma\in S^{-1}(\Omega\times\Omega)$.

用(1.4.4)代入(1.4.2)并作分部积分k次，我们希望得到

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}L^k(a(x,y,\xi)u(y))dyd\xi. \tag{1.4.6}$$

但在作分部积分时，需设 $m<-n$. 实际上，因为 $a(x,y,\xi)u(y)$ 对 y 有紧支集，故在对 y 作分部积分时，“积分号外”部分恒为 0. 对于 ξ 注意到

$$|a(x,y,\xi)u(y)|\leqslant C(1+|\xi|)^m,$$

而积分(1.4.2)是绝对收敛的，其被积函数在 $|\xi|\to\infty$ 时趋于 0. 对于(1.4.6)则有

$$|L^k(a(x,y,\xi)u(y))|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-ks},$$

$$s=\min\{\rho,1-\delta\},\qquad(1.4.7)$$

所以被积函数在 ∞ 处相当快地趋于 0. 这样，由(1.4.2)确可作分部积分而得(1.4.6).

若 $m\geqslant -n$，则积分(1.4.2)已没有意义，但因(1.4.6)中的 k 是任意的，而总可取 k 充分大使 $m-ks<-n$，$s=\min\{\rho,1-\delta\}$，从而(1.4.7)成立，而(1.4.6)是绝对可积的. 所以，这时我们就以(1.4.6)作为 Au 之定义. 而且，由 k 之任意性可知(1.4.6)之被积函数不仅是 C^∞ 的、对 y 有紧支集的，而且对 ξ 以足够快的速度下降，因而在(1.4.6)之积分号下作各种分析运算也都是合法的.

以上的手续称为算子之正则化.

下面讨论正则化以后的算子 A 的基本性质. 注意，我们显然有 $A: C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$，故由 Schwartz 核定理，$A$ 有广义函数核 $A(x,y)$.

定理 1.4.2 *设 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$，则相应于算子 A 的广义函数核 $A(x,y)$ 必适合*

1) $\operatorname{supp} A\subset\Sigma_a=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega;\ \exists\xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0$ *使* $(x,y,\xi)\in\operatorname{supp} a\}$.

2) *若 $\operatorname{supp} A$ 为恰当的，且在 $\Omega\times\Omega$ 之对角线集 $\Delta=\{(x,x);x\in\Omega\}$ 附近有另一个 $a'\in S^m_{\rho,\delta}$ 使 $a'\equiv a$ 于 Δ 附近，则集*

$$\Sigma_{a'}=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega;\ \exists\xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0\text{ 使 }(x,y,\xi)\in\operatorname{supp} a'\}$$

也是恰当的，而且 a 与 a' 相应于相同的算子 $A=A'$.

证 1) 核 $A(x,y)$ 由下式定义：

$$\langle A,w\rangle=(2\pi)^{-n}\iiint e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)w(x,y)\,dx\,dy\,d\xi.$$

若 $\operatorname{supp} w\cap\operatorname{supp} a=\varnothing$，自然有 $\langle A,w\rangle=0$，因此 $\operatorname{supp} A\subset\{(x,y)\in\Omega\times\Omega;\ \exists\xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0$，使 $(x,y,\xi)\in\operatorname{supp} a(x,y,\xi)\}$.

2) 取一具有恰当支集的函数 $\varphi(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$ 使在 $\Delta\cup\operatorname{supp} A$ 上 $\varphi\equiv 1$. 令 $a'(x,y,\xi)=\varphi(x,y)a(x,y,\xi)$，则 a' 适合所求. 集 $\{(x,y)\in\Omega\times\Omega;\ \exists\xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0$ 使 $(x,y,\xi)\in\operatorname{supp} a'(x,y,\xi)\}\subset\operatorname{supp}\varphi\cap\Sigma_a$ 自然是恰当的. 而且在 Δ 附近 $a\equiv a'$，因此，对任意 $v(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}\langle Au,v\rangle&=\langle A(x,y),\ v(x)\otimes u(y)\rangle\\&=\langle\varphi A,\ v\otimes u\rangle=\langle A,\ \varphi(v\otimes u)\rangle\\&=\iiint e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)\varphi(x,y)u(y)v(x)\,dx\,dy\,d\xi\\&=\iiint e^{i\xi(x-y)}a'(x,y,\xi)u(y)v(x)\,dx\,dy\,d\xi\\&=\langle A'u,v\rangle.\end{aligned}$$

由 v 之任意性即有 $A=A'$.

现在讨论上述重象征的广义函数核. 我们可以证明和定理1.2.3同样的结果.

定理 1.4.3 *以 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$ 为振幅函数的 PsDO A 的广义函数核 $A(x,y)$ 在 $\Omega_x\times\Omega_y\backslash\Delta$ 上为 C^∞ 的. 更确切地说，若对 $j\in\mathbf{N}$ 有 $m-\rho(|\alpha|-j)<-n$，则*

$$(x-y)^\alpha A(x,y)\in C^j(\Omega_x\times\Omega_y).$$

证 仿照正规化的方法，可以定义(注意在讨论广义函数核时恒设 $u(y)\in C_0^\infty(\Omega)$)

$$A(x,y)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}L^k a(x,y,\xi)\,d\xi,$$

这里例如可取

$$L=i\sum_j(x_j-y_j)^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

从而当 $(x,y)\notin\Delta$ 时，$x-y\neq 0$ 而有

$$(x-y)^\alpha A(x,y) = (2\pi)^{-n}\iint\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_\xi\right)^\alpha e^{\mathrm{i}\xi(x-y)}L^k a(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\iint e^{\mathrm{i}\xi(x-y)}(\mathrm{i}\partial_\xi)^\alpha L^k a(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

由 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$ 知

$$|(\mathrm{i}\partial_\xi)^\alpha L^k a(x,y,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-\rho(k+|\alpha|)}.$$

因为 k 和 $|\alpha|$ 都可以任意取，故知不但可令 $m-\rho(k+|\alpha|)<-n$ 使上之积分为绝对收敛，而且可以对 x,y 微分任意多次，因而定理得证.

以上我们把象征适当推广为振幅函数（重象征），现在要问一个相反的问题，即(1.4.6)可否化为形如(1.4.2)的 PsDO? 下面的定理有基本的重要性，而在其中不仅需规定 $0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$，还必须 $\delta<\rho$.

定理 1.4.4 *设 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$，$0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$，$\delta<\rho$，其相应的算子 A 为恰当支的，则 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta})$，而相应的象征 $p(x,\xi)=e^{-\mathrm{i}\xi x}A(e^{\mathrm{i}\xi x})\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 而且*

$$p(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\,|_{y=x}. \tag{1.4.8}$$

证 设 $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{\mathrm{i}\xi x}\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

于是 A 可以写为

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int A(e^{\mathrm{i}\xi x})\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int e^{\mathrm{i}\xi x}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

现在要证明 $p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 且有渐近展开式(1.4.8). 为此，我们要应用定理 1.4.2 适当修改 $a(x,y,\xi)$ 而在 Δ 附近不影响 A. 令

$$b(x,y,\xi) = a(x,x+y,\xi),$$

则 b 作为 y 的函数(即固定 x 与 ξ)有紧支集. 事实上，若 $y\in\{y';\ b(x,y',\xi)\neq 0\}$，则 $x+y\in\pi_2(\pi_1^{-1}(x))\cap\Sigma_a$ 为紧. 这里 $\pi_1:(x,y)$

$\to x$，$\pi_2:(x,y)\to y$ 是投影映射. 以 $a(x,y,\xi)$ 之式代入 A 之表达式，有

$$p(x,\eta) = e^{-\mathrm{i}\eta x}(2\pi)^{-n}\iint e^{\mathrm{i}\xi(x-y)}a(x,y,\xi)e^{\mathrm{i}\eta y}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

$$= e^{-\mathrm{i}\eta x}(2\pi)^{-n}\iint e^{\mathrm{i}\xi(x-y)}b(x,y-x,\xi)e^{\mathrm{i}\eta y}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

$$= e^{-\mathrm{i}\eta x}(2\pi)^{-n}\iint e^{-\mathrm{i}\xi z}b(x,z,\xi)e^{\mathrm{i}\eta(z+x)}\mathrm{d}z\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int\hat{b}_2(x,\xi-\eta,\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int\hat{b}_2(x,\xi,\xi+\eta)\mathrm{d}\xi. \tag{1.4.9}$$

这里 $\hat{b}_2(x,\cdot,\eta)$ 表示 $b(x,\cdot,\eta)$ 对第二个变元之 Fourier 变换. 因为 $b(x,\cdot,\eta)$ 是 C_0^∞ 的，故 $\hat{b}_2(x,\xi,\eta)$ 关于 ξ 是急减的. 更由于 $a(x,y,\eta)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$，所以

$$|\partial_\xi^\beta\partial_\eta^\alpha\hat{b}_2(x,\xi,\eta)|\leqslant C_N(1+|\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}(1+|\xi|)^{-N},\quad\forall N. \tag{1.4.10}$$

前面我们用过一个不等式①

$$(1+|\xi|)^s\leqslant(1+|\eta|)^s(1+|\xi-\eta|)^{|s|}.$$

在其中以 $\xi+\eta$ 代替 ξ 则有

$$(1+|\xi+\eta|)^s\leqslant(1+|\xi|)^{|s|}(1+|\eta|)^s,$$

代入(1.4.10)有

---

① 这个不等式的证明如次. 先看 $s\geqslant 0$ 的情况. 若 $|\eta|\geqslant|\xi|$，则

$$(1+|\xi|)^s\leqslant(1+|\eta|)^s,$$

而 $(1+|\xi-\eta|)^{|s|}\geqslant 1$，故上式成立. 若 $|\eta|\leqslant|\xi|$，则

$$\begin{aligned}(1+|\eta|)(1+|\xi-\eta|)&\geqslant(1+|\eta|)(1+|\xi|-|\eta|)\\&\geqslant 1+|\xi|-|\eta|+|\eta|+|\xi||\eta|-|\eta|^2\\&=1+|\xi|+(|\xi|-|\eta|)|\eta|\\&\geqslant 1+|\xi|.\end{aligned}$$

所以 $(1+|\eta|)^s(1+|\xi-\eta|)^{|s|}\geqslant(1+|\xi|)^s$. 若 $s<0$，则记 $s=-s'$ 并将 $|\eta|$ 与 $|\xi|$ 互换仍可得此不等式.

$$|\partial_x^\beta \partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,\xi+\eta)|$$
$$\leqslant C_N(1+|\xi+\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}(1+|\xi|)^{-N}$$
$$\leqslant C_N(1+|\xi|)^{|m|+\rho|\alpha|+\delta|\beta|-N}(1+|\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

回到(1.4.9)即有

$$|\partial_x^\beta \partial_\eta^\alpha p(x,\eta)| \leqslant C(1+|\eta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \qquad (1.4.11)$$

这里取 N 充分大使 $\int (1+|\xi|)^{|m|+\rho|\alpha|+\delta|\beta|-N} d\xi < +\infty$. 这样证明了 $p \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.

最后看渐近展开式，将 $\hat{b}_2(x,\xi,\xi+\eta)$ 按第三个变元用 Taylor 公式在点 η 展开：

$$\left|\hat{b}_2(x,\xi,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,\eta)\xi^\alpha\right|$$
$$\leqslant C|\xi|^k \sup_{|\alpha|=k, 0<t<1} |\partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,t\xi+\eta)|$$
$$\leqslant C|\xi|^k \sup_{0<t<1}(1+|\eta+t\xi|)^{m-\rho k}(1+|\xi|)^{-N},$$

(用(1.4.10)式)

若 $|\xi|<|\eta|/2$，在上式中取 $N=k$ 而知 $|\xi|^k(1+|\xi|)^{-N}<1$，从而上式以 $C(1+|\eta|)^{m-\rho k}$ 为界. 若 $|\xi| \geqslant |\eta|/2$，则

$$(1+|\eta+t\xi|)^m \leqslant C(1+|\xi|)^m, \quad (1+|\eta+t\xi|)^{-\rho k} \leqslant 1.$$

从而上式以 $C(1+|\xi|)^{m+k-N}$ 为界. 以 Taylor 展式代入(1.4.9)并注意到

$$(2\pi)^{-n}\int \partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,\eta)\xi^\alpha d\xi$$
$$= D_y^\alpha (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi y}\partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,\eta)d\xi\Big|_{y=0}$$
$$= D_y^\alpha \partial_\eta^\alpha b(x,y,\eta)|_{y=0} = D_y^\alpha \partial_\eta^\alpha a(x,y,\eta)|_{y=x},$$

即有

$$\left|p(x,\eta) - \sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha \partial_\eta^\alpha a(x,y,\eta)|_{y=x}\right|$$
$$= \left|(2\pi)^{-n}\int\left(\hat{b}_2(x,\xi,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \hat{b}_2(x,\xi,\eta)\xi^\alpha\right)d\xi\right|$$

$$\leqslant C\int_{|\xi|<\frac{1}{2}|\eta|}(1+|\eta|)^{m-\rho k}d\xi + C\int_{|\xi|\geqslant\frac{1}{2}|\eta|}(1+|\xi|)^{m+k-N}d\xi$$
$$\leqslant C(1+|\eta|)^{m-\rho k+n} + C(1+|\eta|)^{m+k-N+n}.$$

取 $N \geqslant 2k$ 即可得到

$$\left|p(x,\eta) - \sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha \partial_\eta^\alpha a(x,y,\eta)|_{y=x}\right| \leqslant C(1+|\eta|)^{m+n-\rho k}.$$

特别重要的是

$$|D_y^\alpha \partial_\eta^\alpha a(x,y,\eta)| \leqslant C(1+|\eta|)^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}.$$

由于规定了 $\delta<\rho$，才能得到 $m-(\rho-\delta)|\alpha| \downarrow -\infty$. 只有这样，(1.4.8)才确为渐近展开式. 至此，定理证毕.

现在可以补足前面未证完的两个定理，首先是

定理 1.2.7 $\{\mathrm{Op}(S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)) = \bigcap_m \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))\} = \{$**具有 C^∞ 广义函数核的算子**$\} = \{$**正则化算子**$\}$.

证 由定义 $\mathrm{Op}(S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)) = \bigcap_m \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$. 再由系 1.2.5,

$$\{\bigcap_m \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))\} = \{\text{具有 } C^\infty \text{ 广义函数核的算子}\},$$

而右方显然含于{正则化算子}之中. 余下尚需证明

$$\{\text{正则化算子}\} \subset \{\mathrm{Op}(S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega))\}.$$

为此令算子 A 之广义函数核 $A(x,y) \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. 令

$$a(x,y,\xi) = e^{-i(x-y)\xi}\rho(\xi)A(x,y),$$

这里 $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 而且 $(2\pi)^{-n}\int \rho(\xi)d\xi = 1$，则易见 A 可以写成

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi,$$

立即可见 $a(x,y,\xi) \in S^{-\infty}(\Omega\times\Omega)$. 最后证明正则化算子 A 必具 C^∞ 广义函数核. 为此，令 A 作用在 $\delta_y(x)$ 上，而有

$$a(x,y) = (A\delta_y)(x). \qquad (1.4.12)$$

取 $(x_0,y_0) \in \Omega_x \times \Omega_y$ 有

$$|a(x,y) - a(x_0,y_0)| \leqslant |(A\delta_y)(x) - (A\delta_{y_0})(x)|$$
$$+ |(A\delta_{y_0})(x) - (A\delta_{y_0})(x_0)|,$$

因为 $\delta_{y_0}(x) \in \mathscr{E}'(\Omega_x)$，而 $A: \mathscr{E}'(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$，所以 $(A\delta_{y_0})(x) \in$

$C^\infty(\Omega)$，故对任一 $\varepsilon>0$，必有 $\eta>0$ 存在，使当 $|x-x_0|<\eta$ 时

$$|(A\delta_{y_0})(x)-(A\delta_{y_0})(x_0)|<\varepsilon/2.$$

由 A 之连续性又知，当 $|x-x_0|<\eta'$ 时，$A\delta_y(x)$ 对 y 一致连续，故又有 $\eta''>0$ 使当 $|y-y_0|<\eta''$ 时，

$$|(A\delta_y)(x)-(A\delta_{y_0})(x)|<\varepsilon/2.$$

这样得知 $a(x,y)$ 在 $\Omega\times\Omega$ 中连续. 对 $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta a(x,y)=\partial_x^\alpha A(\delta_y^{(\beta)}(x))$ 应用同上推理即知 $a(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. 最后令 A_1 是以 $a(x,y)$ 为广义函数核的算子，则 $(A_1\delta_y^{(\beta)})(x)=(A\delta_y^{(\beta)})(x)$ 对一切 $y\in\Omega$，$\beta\in\mathbf{N}^n$ 成立. 但这种 $\delta_y^{(\beta)}$ 在 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 中稠密，所以 $A=A_1:\mathscr{E}'(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$. 至此定理证毕.

定理 1.2.10 之证明　设 A 之象征 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$. 作一个具有恰当支集的 $C^\infty(\Omega\times\Omega)$ 函数 $\varphi(x,y)$ 使在对角线集 Δ 之附近为 1，令

$$a_1(x,y,\xi)=\varphi(x,y)a(x,\xi),$$

则易见 $a_1(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega)$，而且 Σ_{a_1}（定理 1.4.2 之 1)）是恰当的. 以 $a_1(x,y,\xi)$ 为振幅函数即可作出 PsDO $A_1\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 也是恰当的. 令 $A(x,y)$ 和 $A_1(x,y)$ 分别表示 A 和 A_1 之广义函数核，易见 $A_1(x,y)=\varphi A(x,y)$，从而在 Δ 附近 $A_1(x,y)\equiv A(x,y)$. 定理 1.4.3 和上述定理 1.2.7 告诉我们 PsDO A 与 A_1 只相差一个正则化算子 R.

现在要讨论一个十分重要的概念，即主象征.

上一节中，我们已从振幅函数 $a(x,y,\xi)$ 作出一个象征：

$$e^{-i\xi x}A(e^{i\xi x})=a(x,\xi).$$

准确些说应称为 PsDO A 的全象征. 由定理 1.2.10，对任一 $A\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 必有分解式 $A=A_1+R$，其中 $A_1\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 为恰当支的，而 R 是正则化算子. 若 A 尚有另一分解 $A=A_1'+R'$，则

$$A_1-A_1'=R'-R\in\mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

前面我们已经说过，在讨论 PsDO 中 $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 是不足道的，即以商空间 $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))$ 之一元（即一个 mod $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 的等价类）作为一个 PsDO. 同样，在象征空间中，$S^{-\infty}(\Omega)$ 是不足道的，即以商空间 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$ 之一个元（即一个 mod $S^{-\infty}$ 的等价类）作为全象征. 这样我们得到了一个同构

$$\sigma:\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))\sim S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega).$$

总之我们可以

定义 1.4.5　同构

$$\sigma:\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))\sim S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$$

称为 PsDO $A\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))$ 之全象征. 以后我们常记 $p(x,\xi)$ 为 $\sigma(A)$，或记 $A=p(x,D)$.

以上的讨论自然是对 $0<\rho\leqslant1$，$0\leqslant\delta<1$ 且 $\delta<\rho$ 的情况而言的.

再看渐近展开式(1.4.8)，其主项为 $a(x,x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 而其余各项则分属 $S^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}_{\rho,\delta}(\Omega)$. 一般说来，若有 $p(x,\xi)$ 的渐近展开式

$$p(x,\xi)\sim\sum_{k\geqslant0}p_k(x,\xi)=p_0(x,\xi)+q(x,\xi),$$

这里，$p_k(x,\xi)\in S^{m_k}_{\rho,\delta}(\Omega)$，且 $m_k\downarrow-\infty$，$m_0=m$，则

$$q(x,\xi)\in S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega)\subset S^m_{\rho,\delta}(\Omega),$$

因而 $\sigma(q)\in S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$ 对应于 PsDO $q(x,D)\in\mathrm{Op}(S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))$. 与 $\sigma(p)$ 比较并求商，又得一个同构

$$\sigma_m:\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))/\mathrm{Op}(S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega))\to S^m_{\rho,\delta}(\Omega)/S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

定义 1.4.6　*同构 σ_m 称为 PsDO A 的主象征. 常记为 $p_m(x,\xi)$（现在下标 m 表示阶数而不是(1.4.8)的第 $m+1$ 项).*

再回到 1.1 节末尾关于渐近展开的说明. 若 $p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 可按 ξ 的 m_j 阶正齐次函数 $p_j(x,\xi)\in S^{m_j}_{\rho,\delta}(\Omega)$ 作渐近展开，这里 $m_0=m$，$m_j\downarrow-\infty$，则

$$p_m(x,\xi)=\sigma_m(x,\xi),\quad p_m(x,t\xi)=t^m p_m(x,\xi),\ t>0,$$

即是 A 的主象征. 象征可以这样展开的 PsDO 常称为经典的 PsDO.

现在我们要证明 $\mathrm{Op}(S^\infty_{\rho,\delta}(\Omega))=\bigcup_m\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 当 $0<\rho\leqslant1$，$0\leqslant\delta<1$ 且 $\delta<\rho$ 时成一个代数. 它有一个"乘法"（即复合）还有两个对合运算（转置算子和伴算子）. 一个代数上的对合运算 ι，即适

合 $\iota^2=\mathrm{id}$ 的一个自同构. PsDO A 的转置算子 ${}^tA$ 和伴算子 A^* 定义如下：对任意 $u,v\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\langle Au,v\rangle = \langle u,{}^tAv\rangle. \tag{1.4.13}$$

这里 $\langle f,g\rangle$ 是 Euclid 配对：

$$\langle f,g\rangle = \int fg\,dx. \tag{1.4.14}$$

伴算子 A^* 则由下式定义：

$$(Au,v) = (u,A^*v),\quad u,v\in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.4.15}$$

这里 (f,g) 则是 Hermite 配对：

$$(f,g) = \int f\bar{g}\,dx. \tag{1.4.16}$$

定理 1.4.7 *若 A 为恰当的 PsDO $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 且*

$$0<\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\delta<1,\quad \delta<\rho,$$

则可定义 ${}^tA, A^*$ 均为 $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$，其象征为

$$\sigma({}^tA)(x,\xi) = \sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{1}{\alpha!}D_x^\alpha\partial_\xi^\alpha\sigma(A)(x,-\xi), \tag{1.4.17}$$

$$\sigma^*(A)(x,\xi) = \sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{1}{\alpha!}D_x^\alpha\partial_\xi^\alpha\overline{\sigma(A)(x,\xi)}, \tag{1.4.18}$$

而其广义函数核为 ${}^tA(x,y)=A(y,x)$，$A^*(x,y)=\overline{A(y,x)}$.

证 设 $u,v\in C_0^\infty$，由定义有

$$\begin{aligned}\langle Au,v\rangle &= \langle u,{}^tAv\rangle\\ &= (2\pi)^{-n}\iiint e^{i\xi(x-y)}\sigma(A)(x,\xi)u(y)v(x)\,dydxd\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Au,v) &= (u,A^*v)\\ &= (2\pi)^{-n}\iiint e^{i\xi(x-y)}\sigma(A)(x,\xi)u(y)\,\overline{v(x)}\,dydxd\xi.\end{aligned}$$

这里的积分应理解为振荡积分，而因被积函数对 x,y 有紧支集，故在算子 ${}^tL$ 中仅需有 $\partial/\partial\xi$ 即可，定理 1.4.3 的证明中已经看到了这一点. 用 Fubini 定理即得

$$\langle u,{}^tAv\rangle = \int u(y)dy\cdot(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}\sigma(A)(x,\xi)v(x)\,dxd\xi.$$

因此

$${}^tAv(y) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}\sigma(A)(x,\xi)v(x)\,dxd\xi.$$

将 x 与 y 互换，并将 ξ 写为 $-\xi$ 有

$${}^tAv(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}\sigma(A)(y,-\xi)v(y)\,dyd\xi.$$

所以 ${}^tA\in\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta})$，而以 $\sigma(A)(y,-\xi)$ 为振幅函数. 由定理 1.4.4 即得(1.4.17)式. (1.4.18)的证明与此类似. 关于广义函数核的结果自然成立.

注 这个定理的证明中利用了 A 为恰当支这一事实，但由于除了一个正则化算子外，A 恒可化为具有恰当支的 PsDO. 所以在定理的陈述与证明中都未提到这件事. 以下也都这样作.

现在再看算子的复合，即此代数中的乘法. 设有

$$A\in\mathrm{Op}(S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega)),\quad B\in\mathrm{Op}(S^{m_2}_{\rho,\delta}(\Omega)),$$

由上所述，不妨设 A,B 均为具有恰当支的，因而例如均为 $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$ 的连续算子，从而 $B\circ A$ 是有意义的. 现在我们要证明

定理 1.4.8 *$B\circ A\in\mathrm{Op}(S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(\Omega))$，而且*

$$\sigma_{B\circ A}(x,\xi) = \sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi). \tag{1.4.19}$$

证 容易看到 ${}^t({}^tA)=A$，因此，由定理 1.4.7 之证明知

$$\begin{aligned}Au(x) &= (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)\,dyd\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\left(\int e^{-i\xi y}\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)dy\right)d\xi,\end{aligned}$$

所以

$$(Au)^\wedge(\xi) = \int e^{-i\xi y}\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)\,dy.$$

由此

$$\begin{aligned}B\circ Au(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\sigma_B(x,\xi)(Au)^\wedge u(\xi)\,d\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}\sigma_B(x,\xi)\sigma_{{}^tA}(y,-\xi)u(y)\,dyd\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)u(y)\,dyd\xi.\end{aligned}$$

容易看到，$B\circ A$仍是一个 PsDO，其振幅函数

$$a(x,y,\xi)=\sigma_B(x,\xi)\sigma_A^{t}(y,-\xi)\in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2}.$$

由定理 1.4.4 可得其象征为

$$\begin{aligned}\sigma_{B\cdot A}(x,\xi)&\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\big|_{y=x}\\&\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta\sigma_B(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_y^\alpha\sigma_A^{t}(y,-\xi)\big|_{y=x}\\&\sim\sum_{\beta,\gamma,\delta}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial_\xi^\beta\sigma_B(x,\xi)\partial_\xi^{\gamma+\delta}D_x^{\beta+\gamma+\delta}\sigma_A(x,\xi)\\&\sim\sum_{\beta,\lambda}\Big[\sum_{\gamma+\delta=\lambda}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}\Big]\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma_B(x,\xi)\partial_\xi^\lambda D_x^{\beta+\lambda}\sigma_A(x,\xi).\end{aligned}$$

但 $\sum\limits_{\gamma+\delta=\lambda}\dfrac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}=\dfrac{1}{\lambda!}(1-1)^\lambda$ 当 $\lambda\neq0$ 时为 0，$\lambda=0$ 时为 1. 故有

$$\sigma_{B\cdot A}(x,\xi)\sim\sum_\beta\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma_B(x,\xi)D_x^\beta\sigma_A(x,\xi).$$

定理证毕.

因为 $f(x)\in C^\infty$ 是一个 $S_{\rho,\delta}^0(\Omega)$ 象征，故乘以 $f(x)$ 可以看做一个 0 阶的 PsDO，而其象征即为 $f(x)$. 应用上述定理即有

系 1.4.9 *若 $A\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\Omega))$，$f\in C^\infty(\Omega)$，则对任意正整数 N 均有*

$$A(fu)(x)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(\partial_\xi^\alpha\sigma_A)(x,D)u(x)+T_Nu,$$

这里 $T_N\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{m-N}(\Omega))$.

如果把复合作为 PsDO 代数中的乘法看，则此乘法是不可交换的，而相应的象征作为函数来看，其通常的乘法是可交换的. 二者之间的同构只是作为线性空间的同构. 若希望作为代数仍能同构，就需要在象征类中引入一种乘法"#"如下：

$$a(x,\xi)\#b(x,\xi)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)D_x^\alpha b(x,\xi).\quad(1.4.20)$$

(这种乘法在理论物理中也会遇到，有时称为 Witt 乘积.) 这样就得到了象征类与 PsDO 类作为代数的同构. 但是就主象征而言，因为

(1.4.19)中 $\alpha=0$ 的一项是可交换的，从而有

$$(\sigma_{B\cdot A})_{m_1+m_2}=(\sigma_A)_{m_1}(\sigma_B)_{m_2}=(\sigma_{A\cdot B})_{m_1+m_2},$$

即仍是可交换的.

以后我们经常要用到两个 PsDO $A\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{m_1}(\Omega))$ 和 $B\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{m_2}(\Omega))$之交换子$[A,B]$，其定义为

$$[A,B]=A\circ B-B\circ A.$$

很容易看到，这是一个 $\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)}(\Omega))$类的 PsDO，它的主象征是所谓 Poisson 括弧：

$$\begin{aligned}(\sigma_{m_1+m_2-\lambda})[A,B](x,\xi)&=\{(\sigma_A)_{m_1},(\sigma_B)_{m_2}\}\\&=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial(\sigma_A)_{m_1}}{\partial\xi_j}\frac{\partial(\sigma_B)_{m_2}}{\partial x_j}-\frac{\partial(\sigma_A)_{m_1}}{\partial x_j}\frac{\partial(\sigma_B)_{m_2}}{\partial\xi_j}\Big),\\&\qquad\lambda=\rho-\delta.\end{aligned}\quad(1.4.21)$$

1.5 椭圆与亚椭圆拟微分算子

拟微分算子理论的一个重要来源是研究椭圆算子的基本解问题. 首先应将椭圆性定义推广到拟微分算子. 以下恒设 $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$中

$$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1.$$

定义 1.5.1 *设 $A\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\Omega))$. 若对 Ω 之任一紧支集 K 均可找到一个常数 $C>0$ 使当$|\xi|$充分大时有*

$$|\sigma_A(x,\xi)|\geqslant C(1+|\xi|)^m\ (\text{或}\geqslant C|\xi|^m),\quad x\in K\subset\subset\Omega,\quad(1.5.1)$$

则称 A 是 m 阶椭圆拟微分算子.

注 若用主象征表示，则当$|\xi|$充分大时，$(\sigma_A)_m(x,\xi)$是$\sigma_A(x,\xi)$之主部，故只需要求(1.5.1)对主象征成立即可. 若 A 为经典PsDO，从而$(\sigma_A)_m(x,\xi)$是 ξ 的 m 阶正齐次函数，则(1.5.1)可以代以$(\sigma_A)_m(x,\xi)\neq0$，$\xi\neq0$，因为这时 $\inf\limits_{|\xi|=1}|\sigma_A(x,\xi)|=c>0$，而

$$|\sigma_A(x,\xi)|=|\xi|^m\Big|\sigma_A\Big(x,\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big|\geqslant c|\xi|^m.$$

当 A 为线性偏微分算子时，主象征即是主部，而这个定义与常见的

定义完全一致.

椭圆 PsDO 最重要的性质是：它们基本上是可逆的. 确切地说，我们有

定理 1.5.2 *算子 $P\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 为 m 阶椭圆算子之充分必要条件是存在一个恰当椭圆 PsDO $Q\in \mathrm{Op}(S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega))$ 使得 $P\circ Q\equiv \mathrm{id}\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$. 它也适合 $Q\circ P\equiv \mathrm{id}\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$. Q 称为 P 的拟基本解(parametrix)，它在 $\mathrm{mod}\ S^{-\infty}$ 意义下是唯一的.*

证 先证明必要性，即椭圆 PsDO 必有拟基本解存在.

若 Q_1 适合 $Q_1\circ P\equiv \mathrm{id}\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$，则称 Q_1 为左拟基本解. 同样，适合 $P\circ Q_2\equiv \mathrm{id}\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$的 Q_2 称为右拟基本解. 我们先证明二者一致(因此定理中只说拟基本解而不分左、右)：$Q_1\equiv Q_2\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$. 实际上

$$Q_1\circ P=\mathrm{id}+R_1,\quad R\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}),$$

双方以 Q_2 从右方作用之，有

$$Q_1\circ P\circ Q_2=Q_2+R_1\circ Q_2,$$

但 $P\circ Q_2=\mathrm{id}+R_2$, $R_2\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$，所以

$$Q_1\circ(\mathrm{id}+R_2)=Q_1+Q_1\circ R_2=Q_2+R_1\circ Q_2,$$

即

$$Q_1-Q_2=R_1\circ Q_2-R_2\circ Q_1\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

现在我们来构造一个左拟基本解. 这时我们需要一个引理.

引理 1.5.3 *设 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$是 m 阶椭圆 PsDO，则其象征 $\sigma_A(A)(x,\xi)$ 当 $|\xi|$ 充分大时必适合下式：*

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(A)(x,\xi)/\sigma(x,\xi)\in S^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}(\Omega). \tag{1.5.2}$$

证 将上式分子记作$\partial_y^\gamma\sigma(A)(y)$, $y=(x,\xi)$, $\gamma=(\alpha,\beta)$，于是

$$\partial_y(\partial_y^\gamma\sigma(A)(y)/\sigma(A)(y))$$
$$=\frac{\partial_y^{\gamma+1}\sigma(A)(y)}{\sigma(A)(y)}-\frac{\partial_y\sigma(A)(y)}{\sigma(A)(y)}\cdot\frac{\partial_y^\gamma\sigma(A)(y)}{\sigma(A)(y)}.$$

依此类推有

$$\partial_y^\delta(\partial_y^\gamma\sigma(A)(y)/\sigma(A)(y))$$
$$=\sum_{k=0}^{|\delta|}\sum_{\delta_0+\cdots+\delta_k=\delta}C_{\delta_0,\cdots,\delta_k}\frac{\partial_y^{\delta_0}\partial_y^\gamma\sigma(A)(y)}{\sigma(A)(y)}\prod_{j=1}^k\frac{\partial_y^{\delta_j}\sigma(A)(y)}{\sigma(A)(y)}.$$

由于$|\sigma(A)(y)|\geqslant C(1+|\xi|)^m$，故可得(1.5.2).

定理 1.5.2 证明之完成 先作一个 $Q_0\in \mathrm{Op}(S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega))$，使当 $|\xi|\geqslant r>0$ 时以$(\sigma(P)(x,\xi))^{-1}$为象征，而且是恰当的. 于是由算子复合公式有

$$\sigma(Q_0\circ P)\sim 1+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha(\sigma(P))^{-1}D_x^\alpha\sigma(P)$$
$$=1+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial_\xi^\alpha\sigma(P)^{-1}}{\sigma(P)^{-1}}\cdot\frac{D_x^\alpha\sigma(P)}{\sigma(P)}. \tag{1.5.3}$$

用证明引理 1.5.2 的方法可证 $\sigma(P)^{-1}\in S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega)$. 故由引理知

$$\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial_\xi^\alpha\sigma(P)^{-1}}{\sigma(P)^{-1}}\cdot\frac{D_x^\alpha\sigma(P)}{\sigma(P)}\in S^{-(\rho-\delta)|\alpha|}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

如果记以 $\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha(\sigma(P))^{-1}D_x^\alpha\sigma(P)$ 为象征的 PsDO 为 R_0，则 $R_0\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega))$，而有

$$Q_0\circ P\equiv I+R_0\quad(\mathrm{mod}\ \mathrm{Op}(S^{-\infty})). \tag{1.5.4}$$

现在仿照泛函分析中构造 Neumann 级数 $(I+R_0)^{-1}=I+\sum_{j=1}^\infty(-1)^jR_0{}^j$ 的方法作渐近展开式

$$C_0\sim\sum_{j=0}^\infty(-1)^jR_0{}^j,\quad C_0\in S_{\rho,\delta}(\Omega),$$

则 $C_0(I+R_0)\equiv I\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$. 用 C_0 从左方作用于(1.5.4)即有

$$(C_0\circ Q_0)\circ P\equiv I\quad(\mathrm{mod}\ \mathrm{Op}(S^{-\infty})).$$

因此令 $C_0\circ Q_0=Q$，则 $Q\in S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega)$是 P 的左拟基本解. 当然也可作右拟基本解，而由前述这个右拟基本解就是 Q. Q 的椭圆性自明.

拟基本解是唯一的. 因为若有两个拟基本解 Q_1,Q_2，则

$$Q_1\circ P\equiv I\quad(\mathrm{mod}\ \mathrm{Op}(S^{-\infty})).$$

用 Q_2 从右方作用于上式双方，注意到 Q_2 同时也是右拟基本解：

$$P\circ Q_2\equiv I\quad(\mathrm{mod}\ S^{-\infty}),$$

即有

$$Q_1 \equiv Q_2 \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{Op}(S^{-\infty})).$$

现在证明充分性，即若设有 $\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega))$ 的基本解存在，则 P 必为椭圆的. 因 $P\circ Q\equiv I$，用算子的复合公式有

$$\sum_{\alpha\geq 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma(P)\cdot \mathrm{D}_x^\alpha\sigma(Q) = 1 \quad (\mathrm{mod}\ S^{-\infty}),$$

取 $\alpha=0$ 的一项，则有

$$\sigma(P)\cdot\sigma(Q) = 1 + r(x,\xi),\quad r\in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}(\Omega).$$

因此当 x 在 Ω 的某一紧集 K 中，而 $|\xi|$ 又充分大时，必有 $\sigma(P)\cdot\sigma(Q)>1/2$，即

$$|\sigma(P)|\geq\frac{1}{2}|\sigma(Q)|^{-1}.$$

但因 $|\sigma(Q)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-m}$，$x\in K$，$|\xi|$ 充分大，代入上式即知

$$|\sigma(P)(x,\xi)|\geq C(1+|\xi|)^m \sim C|\xi|^m.$$

所以 P 是 $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ 椭圆 PsDO.

注 若 P 是经典的椭圆 PsDO: $\sigma(P)\sim\sum_{j=0}^\infty P_j(x,\xi)$，$P_j(x,\xi)$ 是 ξ 的 $m-j$ 阶正齐次函数，则其拟基本解 Q 也是 $S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega)$ 类的经典的椭圆 PsDO. 实际上，我们可以在

$$\sigma(Q)(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^\infty Q_j(x,\xi),$$

$Q_j(x,\xi)$ 是 ξ 的 $-m-j$ 阶正齐次函数的形式下求 Q. 由算子复合公式，

$$\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma(P)\mathrm{D}_x^\alpha\sigma(Q)-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty}).$$

比较双方齐次性阶数，即知当 $|\xi|$ 充分大（$|\xi|>r$）时，

$$\sigma_m(P)\cdot\sigma_{-m}(Q)=1,$$

$$\sigma_m(P)\sigma_{-m-1}(Q)+\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha\sigma_m(P)\mathrm{D}_x^\alpha\sigma(Q)=0,$$

$$\cdots,$$

$$\sigma_m(P)\sigma_{-m-j}(Q)+\sum_{k+l+|\alpha|=j,\ l<j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_{m-k}(P)\mathrm{D}_x^\alpha\sigma_{-m-l}(Q)=0,$$

$$\cdots.$$

因为 $\sigma_m(P)\neq 0$，故可依次求出 $\sigma_{-m-j}(Q)$，在 $|\xi|\leqslant r$ 时适当补充定义 $\sigma_{-m-j}(Q)$ 即可求出拟基本解 $Q\in S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega)$，由它的求法知 Q 也是经典的 PsDO，而且 $\sigma_{-m}(Q)=(\sigma_m(P))^{-1}\neq 0$. 所以 Q 也是椭圆的.

拟基本解的重要应用是讨论解的正则性问题. 由经典的线性偏微分方程理论知道，椭圆算子的显著特点是解的光滑性，即当方程右方为光滑时，其解也是光滑的. 对椭圆 PsDO 类似结论也成立，即有

定理 1.5.4（Weyl-Schwartz） *设 $A\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\Omega))$ 是椭圆的，则对 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 有*

$$\text{sing supp } Au = \text{sing supp } u. \tag{1.5.5}$$

若 A 为恰当的，则上式对 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 也成立.

证 由上假设，Au 仍在 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 或 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中. 由 PsDO 的拟局部性，

$$\text{sing supp } Au\subset\text{sing supp } u. \tag{1.5.6}$$

但若记 A 之拟基本解为 $B\in\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega))$，则因 $B\circ A=I+R$，$R\in\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 而有

$$u = B\circ Au + Ru,$$

但 $Ru\in C^\infty$，从而

$$\text{sing supp } u = \text{sing supp } B\circ Au\subset\text{sing supp } Au. \tag{1.5.7}$$

比较(1.5.6)与(1.5.7)即得定理之证.

PsDO 理论的出现容许我们对奇性作微局部的考查. 现在椭圆性条件(1.5.1)既是余切丛 $T^*\Omega\backslash 0$ 上的条件，我们想把它推广到 $T^*\Omega\backslash 0$ 的锥形集 Γ 上去. 为简单计，设 $\Gamma=\Omega\times\Gamma_0$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个开集，$\Gamma_0\subset\mathbf{R}_\xi^n\backslash 0$ 是锥形集. 设有 $A\in S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$，若对任一紧子集 $K\subset\subset\Omega$ 均有常数 $C>0$，$r>0$ 使

$$|\sigma(A)(x,\xi)|\geq C(1+|\xi|)^m,\quad |\xi|\geq r, \tag{1.5.8}$$

就说 A 在 Γ 中是椭圆 PsDO. 我们来构造 A 的一个微局部拟基本解. 为此令 $\Gamma_1\subset\subset\Gamma_0$ 是 Γ 的任意的紧锥形子集 $\Gamma_1\subset\subset\Gamma_0$（实际上就是说 $\Gamma_1\cap\{\xi;|\xi|=1\}\subset\subset\Gamma_0\cap\{\xi;|\xi|=1\}$）. 我们有

定理 1.5.5 *在上述条件下，必存在一个在 $\Omega\times\Gamma_1$ 中为椭圆的恰当的 PsDO 记作 $B\in \mathrm{Op}(S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega\times\Gamma_1))$ 使*

$$\sigma(B\circ A)\sim 1,\ \sigma(A\circ B)\sim 1,\quad (x,\xi)\in\Omega\times\Gamma_1. \tag{1.5.9}$$

B 称为 A 在 $\Omega\times\Gamma_1$ 中的微局部拟基本解.

证 仿照定理 1.5.2 的证法，先求出 B_0 使

$$\sigma(B_0\circ A)\sim 1+\sum_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma(B_0)D_x^\alpha\sigma(A)$$
$$=1+\sigma(R_0),\quad (x,\xi)\in\Omega\times\Gamma_1,$$

这里 $\sigma(R_0)\in S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega\times\Gamma_1)$. 作以它为象征的

$$\mathrm{PsDO}\ R_0\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega\times\Gamma_1)),$$

再作 Neumann 级数

$$C_0\sim I+\sum_{j>0}(-1)^jR_0{}^j.$$

于是在 $\Omega\times\Gamma_1$ 中 $C_0\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega\times\Gamma_1))$，令 $B=C_0\circ B_0$ 即适合于所求.

在 1.3 节中我们已经看到，可以用 PsDO 在 $T^*\Omega\backslash 0$ 的个锥形集中对 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 及其谱 $\hat{u}(\xi)$ 同时作出截断. 在有了椭圆算子及其拟基本解以后，我们可以把这方面的结果概括为

定理 1.5.6 *设 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$，$(x_0,\xi_0)\in\Omega\times\Gamma$. 若 $(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$，则必可找到一个 $\mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega\times\Gamma))$ 类 PsDO $A(x,D)$ 使在 (x_0,ξ_0) 的某一个锥邻域 $\Omega\times\Gamma_1$，$\Gamma_1\subset\subset\Gamma$ 中 $\sigma(A)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$，而且 $Au\in C_0^\infty(\Omega)$. 反之，若有上述类型的 $A(x,D)$ 使 $Au\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$.*

注 上述的 A 可以改成椭圆的 PsDO $A_1\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta})$. 因为可以作出 A_1 的微局部拟基本解 B. 并令 $B\circ A_1=A$，则 $A\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$.

定理的证明 1) 必要时可用单位分解去乘 u 而设 $\mathrm{supp}\ u\subset\Omega$ 充分小，而 $\hat{u}(\xi)$ 对 ξ 在 Γ 中急减. 现在作一个 C^∞ 函数 $\chi(\xi)$ 使其当 $|\xi|\geqslant 1$ 时对 ξ 为零阶正齐次函数；在 $\xi=0$ 附近 $\chi(\xi)=0$，$\mathrm{consupp}\ \chi(\xi)\subset\Gamma$；且有一个锥形集 $\Gamma_1\subset\subset\Gamma$ 使

$$\chi(\xi)\equiv 1,\quad \xi\in\Gamma_1,\ |\xi|\geqslant 1.$$

于是 $\chi(\xi)\hat{u}(\xi)$ 是急减函数，而 $\chi(D)u\in C^\infty(\Omega)$. 再作 $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 使在 x_0 附近 $\psi(x)\equiv 1$，于是 $A=\psi(x)\chi(D)$ 即合于所求.

2) 逆定理的证明. 仍作上面的 $\chi(\xi)$ 于是可记以 $\chi(\xi)$ 为象征的 PsDO 为 $\chi(D)\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$，不妨设 $(Au)(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 之支集充分小，于是

$$\chi(\xi)\sigma_A(x,\xi)-\chi(\xi)\in S^{-\infty},$$

用

$$\chi(D)A(x,D)-\chi(D)\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$$

作用到 u 上，因为 $Au\in C_0^\infty$，故 $\chi(D)u\in C^\infty$. 今证 $\chi(D)u\in\mathscr{S}$. 为此我们证明对任意的 $\chi(D)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$（不一定是上面所述的 $\chi(\xi)\in S^0_{\rho,\delta}(\Omega)$）以及任意的自然数 k 以及 $\alpha\in\mathbf{N}^n$，当 $\mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}\ u)\geqslant 1$ 时

$$|D^\alpha\chi(D)u(x)|\leqslant C|x|^{-k},\quad u\in\mathscr{E}'(\Omega).$$

但 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 之元 u 必可写为 $u=\sum_{|\beta|\leqslant l}D^\beta v_\beta$，$v_\beta$ 是具有紧支集的连续函数. 所以，将 D^α 与 D^β 均合并到 $\chi(D)$ 中，我们只需证明

$$|\chi(D)u(x)|\leqslant C|x|^{-2k},\quad u\in C_0(\Omega). \tag{1.5.10}$$

这个证明是很容易的，注意到

$$|x-y|^{-2k}(-\Delta_\xi)^k e^{i\xi(x-y)}=e^{i\xi(x-y)},$$

则对 ξ 作分部积分后有

$$\chi(D)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi(x-y)}[(-\Delta_\xi)^k\chi(\xi)]|x-y|^{-2k}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.$$

因为我们已设 $\mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}\ u)\geqslant 1$，故积分号下的 $|x-y|^{-2k}$ 不影响积分的收敛性. 又

$$|(-\Delta_\xi)^k\chi(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-2k\rho},$$

当 k 充分大时有 $m-2k\rho<-n$，因此上之积分绝对收敛. 再注意到 $|x-y|^{-2k}\sim|x|^{-2k}$，则 (1.5.10) 得证，从而 $\chi(D)u\in\mathscr{S}$. 而

$$(\chi(D)u)^\wedge=\chi(\xi)\hat{u}(\xi)\in\mathscr{S},$$

从而 $\hat{u}(\xi)$ 在锥形域 Γ_1 中急减，而 $(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$. 定理证毕.

这里我们看到了微局部椭圆性与解的正则性有密切关系. 现在考虑不适合椭圆性的点 $(x,\xi)\in T^*\Omega\backslash 0$. 椭圆性的定义是存在 $c>0$ 使 $|\sigma_A(x,\xi)|\geqslant c(1+|\xi|)^m\sim c|\xi|^m$. 因而

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-m}|\sigma_A(x,t\xi)|\neq 0,$$

从而破坏这个条件的点应使 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-m}\sigma_A(x,t\xi)=0$. 于是我们给出

定义 1.5.7 *设 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$，我们定义其特征集 $\mathrm{Char}(A)$ 为*

$$\mathrm{Char}(A)=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\backslash 0;\ \lim_{t\to+\infty} t^{-m}|\sigma_A(x,t\xi)|=0\}. \tag{1.5.11}$$

这显然是一个余切丛上的定义，从而是与局部坐标之选择无关的. 若 A 为经典的 PsDO 而其主象征为 $\sigma_m(A)(x,\xi)=a_m(x,\xi)$，$a_m$ 对 ξ 是 m 阶正齐性函数，则(1.5.11)成为

$$\mathrm{Char}(A)=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\backslash 0;\ a_m(x,\xi)=0\}. \tag{1.5.12}$$

特别对于线性偏微分算子 A，$a_m(x,\xi)$即其主部而定义 1.5.7 与经典的特征定义一致.

定理 1.5.8 *对于 $u\in \mathscr{E}'(\Omega)$，*

$$\mathrm{WF}(u)=\bigcap \mathrm{Char}(A), \tag{1.5.13}$$

这里 $\sigma(A)\in S^0_{\rho,\delta}$，$Au\in C^\infty$.

证 若(x_0,ξ_0)不属于右方，则必有一个 $A\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$，$Au\in C^\infty$，而$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{Char}(A)$，这样的$(x_0,\xi_0)$当然是 A 的椭圆性点. 由定理 1.5.6 知$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$. 反之，若$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$，则必有一个算子 $A\in \mathrm{Op}(S^0)$，$\sigma_A(x,\xi)=1$ 在(x_0,ξ_0)的某个锥邻域中而 $Au\in C^\infty$. 对于这个 A，当然$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{Char}(A)$，所以$(x_0,\xi_0)\notin \bigcap \mathrm{Char}(A)$. 定理证毕.

(1.5.13)显然是波前集的等价定义，它的好处是与坐标无关.

定理 1.5.9 *设 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$为恰当的，$u\in \mathscr{E}'(\Omega)$，则*

$$\mathrm{WF}(Au)\subset \mathrm{WF}(u)\subset \mathrm{WF}(Au)\cup \mathrm{Char}(A). \tag{1.5.14}$$

证 先证左方的包含式. 设$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$，则由定理 1.5.6，一定存在一个恰当的 $P\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$使在$(x_0,\xi_0)$的某个锥邻域中 $\sigma(P)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$而 $Pu\in C_0^\infty$. 现在作一个恰当的 $Q\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$，在$(x_0,\xi_0)$的某个锥邻域中为椭圆的，而在其外有 $Q\in S^{-\infty}$. 所以

$$P\circ Q\equiv Q\equiv Q\circ P\quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{Op}(S^{-\infty})).$$

因为在(x_0,ξ_0)的一个锥邻域中 $A\equiv A\circ P$，而在其外 $Q\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$，故又有

$$Q\circ A\circ P\equiv Q\circ A.$$

但因 $Pu\in C_0^\infty$，从而 $Q\circ A\circ Pu\in C_0^\infty$，而 $Q\circ Au\in C_0^\infty$. 由定理 1.5.6 有$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(Au)$. 故 $\mathrm{WF}(Au)\subset \mathrm{WF}(u)$.

再证右方的包含式. 设$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(Au)\cup \mathrm{Char}(A)$，故$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(Au)$. 由定理 1.5.6 知必有恰当的 $P\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta})$使在$(x_0,\xi_0)$的锥邻域中 $\sigma_P(x,\xi)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$且 $P\circ Au\in C_0^\infty$. 又$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{Char}(A)$，而在$(x_0,\xi_0)$的某个锥邻域中 A 是椭圆的. 由于在此锥邻域中 $\sigma_P(x,\xi)\equiv 1$，故由象征的复合公式知$P\circ A$ 在此锥邻域中也是椭圆的. 再用一次定理 1.5.6 即知$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u)$. 至此定理得证.

若 A 为椭圆的，则 $\mathrm{Char}(A)=\varnothing$，所以由这个定理，即可得到

推论 1.5.10 *若 A 是椭圆 PsDO，则对 $u\in \mathscr{E}'(\Omega)$，*

$$\mathrm{WF}(Au)=\mathrm{WF}(u).$$

这是 Weyl-Schwartz 定理（定理 1.5.4）的微局部精确化.

Gårding 在研究高阶椭圆型方程时，从一般的椭圆算子

$$Au=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u,\quad \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\neq 0,\ \xi\neq 0 \tag{1.5.15}$$

中划分出一类所谓强椭圆算子来，即适合

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\geqslant c|\xi|^m,\quad c>0,\ \xi\neq 0$$

的算子. 显然这里讲的是系数取复值的情况：若系数取实值，椭圆性和强椭圆性是一致的. 但在一般情况下，则凡强椭圆算子必是椭圆的，但其逆不真. Gårding 最初是对线性偏微分算子来证明这个不等式的，后来发现对于 PsDO 也对，即有

定理 1.5.11（Gårding 不等式） *设 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$适合以下不等式*

$$\mathrm{Re}\,\sigma(A)(x,\xi)\geqslant a_0|\xi|^m,\quad x\in\Omega,\ \xi\in \mathbf{R}^n\backslash 0, \tag{1.5.16}$$

$a_0\geqslant 0$ 为一常数，则对任意 $\varepsilon>0$ 以及任意紧集 $K\subset\subset\Omega$，任意实数 s，必有常数 $C>0$ 存在，使

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)\geqslant(a_0-\varepsilon)\|u\|_{m/2}^2-C\|u\|_s^2. \qquad (1.5.17)$$

这里 $\|\cdot\|_k$ 表示 Sobolev 范数.

证 为了证明(1.5.17)需要一个引理，其证法与构造经典的椭圆 PsDO 的拟基本解的方法一致，由此可见这个方法的重要性.

引理 1.5.12 设 $p(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}(\Omega)$，$\mathrm{Re}\,p(x,\xi)\geqslant c_1>0$，则必存在 PsDO $B\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$使

$$\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})-B^*\circ B\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}_{\rho,\delta}(\Omega)), \qquad (1.5.18)$$

这里 $\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})=\dfrac{1}{2}(p(x,\mathrm{D})+p^*(x,\mathrm{D}))$.

证 我们在以下形状的渐近级数中求 $b(x,\xi)=\sigma_B(x,\xi)$:

$$b(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}b_j(x,\xi),\quad b_j\in S^{-(\rho-\delta)j}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

由于本节中恒设 $\delta<\rho$，所以它确为渐近级数. $b_0(x,\xi)$取法如下：

$$b_0(x,\xi)=(\mathrm{Re}\,p(x,\xi))^{1/2}\geqslant c_0>0,$$

以它为象征的 PsDO $b_0(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$. 由算子复合公式

$$\sigma(b_0^*\circ b_0)(x,\xi)\sim\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\overline{b_0(x,\xi)}\mathrm{D}_x^\alpha b_0(x,\xi)$$
$$\equiv|b_0(x,\xi)|^2\quad(\mathrm{mod}\ S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

于是

$$R_1(x,\mathrm{D})=\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})-b_0^*(x,\mathrm{D})\circ b_0(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

设已作出 $b_j(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^{-j(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega))$，$j=0,1,\cdots,k$，使

$$\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})-\sum_{j=0}^{k}b_j^*(x,\mathrm{D})\circ\sum_{j=0}^{k}b_j(x,\mathrm{D})$$
$$=R_{k+1}(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)(k+1)}_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

现在我们希望作 $b_{k+1}(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^{-(k+1)(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega))$，使

$$\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})-\Big(\sum_{j=0}^{k}b_j^*(x,\mathrm{D})+b_{k+1}^*(x,\mathrm{D})\Big)$$
$$\circ\Big(\sum_{j=0}^{k}b_j(x,\mathrm{D})+b_{k+1}(x,\mathrm{D})\Big)\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)(k+2)}_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

展开上式，并略去一切 $\mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)(k+2)}_{\rho,\delta}(\Omega))$之元应该要求

$$R_{k+1}(x,\mathrm{D})-(b_{k+1}^*(x,\mathrm{D})\circ b_0(x,\mathrm{D})$$
$$+b_0^*(x,\mathrm{D})\circ b_{k+1}(x,\mathrm{D}))\in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)(k+2)}_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

回到象征上去，应有

$$R_{k+1}(x,\xi)-(\overline{b_{k+1}(x,\xi)}$$
$$+b_{k+1}(x,\xi))b_0(x,\xi)\in S^{-(k+2)(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

因为 $b_0(x,\xi)=(\mathrm{Re}\,p(x,\xi))^{1/2}\geqslant c_0>0$，所以这样的 $b_{k+1}(x,\mathrm{D})$可以作出. 这样我们作出了 $B(x,\mathrm{D})$. 它实际上近似于 $\mathrm{Re}\,p(x,\mathrm{D})$的平方根.

Gårding 不等式的证明 我们不妨设 $s<m/2$. 因为若对这样的 s 已证得 Gårding 不等式，则对 $s_1>m/2$，不妨任取 $s_0<m/2$，而得

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)\geqslant(a_0-\varepsilon)\|u\|_{m/2}^2-C\|u\|_{s_0}^2$$
$$\geqslant(a_0-\varepsilon)\|u\|_{m/2}^2-C\|u\|_{s_1}^2.$$

这里我们用到了 Sobolev 空间范数明显的不等式：

$$\|u\|_{s_1}\geqslant\|u\|_{s_0}.$$

我们还不妨设 $A\in S^0_{\rho,\delta}(\Omega)$. 事实上令 $\Lambda_{m/2}$是以$(1+|\xi|^2)^{m/4}$为象征的恰当 PsDO，它是自伴的，椭圆的，用 $\Lambda_{-m/2}\circ A\circ\Lambda_{-m/2}$代替 A，则不妨设 $m=0$. 因为若

$$\mathrm{Re}\,(\Lambda_{-m/2}\circ A\circ\Lambda_{-m/2}u,\ u)\geqslant(a_0-\varepsilon)\|u\|_0^2-C\|u\|_{s+m/2}^2,$$

令 $u=\Lambda_{m/2}v$，则 $\|u\|_0=\|v\|_{m/2}$，$\|u\|_{s+m/2}=\|v\|_s$，利用 $\Lambda_{-m/2}$的自伴性，即得(1.5.17).

于是考虑算子

$$C=\frac{1}{2}(A+A^*)-\Big(a_0-\frac{\varepsilon}{2}\Big)I\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega)).$$

应用引理 1.5.12 可以找到 $B\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$，使

$$C-B^*B=R\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega)).$$

所以

$$(Ru,u)=(Cu,u)-(B^*Bu,u)$$
$$=\frac{1}{2}((A+A^*)u,u)-(Bu,Bu)-\Big(a_0-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(u,u).$$

所以

$$\operatorname{Re}(Au,u) = \|Bu\|_0^2 + (a_0 - \frac{\varepsilon}{2})\|u\|_0^2 + (Ru,u)$$
$$\geqslant (a_0 - \frac{\varepsilon}{2})\|u\|_0^2 - |(Ru,u)|.$$

但

$$|(Ru,u)| \leqslant \|Ru\|_0 \|u\|_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_0^2 + C_1\|Ru\|_0^2,$$

然而，$R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega))$，所以对固定的紧集 $K \subset\subset \Omega$，必有常数 C_2 使 $\|Ru\|_0^2 \leqslant C_2 \|u\|_s^2$. 代入上式即得 Gårding 不等式.

椭圆算子的许多性质，对于较广泛的一类算子也对，因此后来对椭圆性有许多推广，最著称的是亚椭圆性概念. 上面已经看到，对椭圆 PsDO A 有

$$\text{sing supp}\, Au = \text{sing supp}\, u. \tag{1.5.19}$$

但是具有这个性质的 PsDO 却不一定都是椭圆的. 因此，我们将适合此式的算子划分出来，并给出以下的定义：

定义 1.5.13 *若 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 且使(1.5.19) 成立，则称 A 是亚椭圆 PsDO.*

定理 1.5.14 *$A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 为亚椭圆的充分条件是它有 PsDO作为其拟基本解存在.*

证 用 B 表示这个拟基本解，则

$$B \circ A = I + R, \quad R \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\Omega)).$$

故对 $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$，因为 $Ru \in C^\infty$，由上式有

$$u = B \circ Au - Ru$$
$$\text{sing supp}\, u = \text{sing supp}\, B \circ Au \subset \text{sing supp}\, Au.$$

这里应用了 B 的拟局部性. 再由 sing supp $Au \subset$ sing supp u 即 PsDO A 的拟局部性知(1.5.19)成立，从而 A 是亚椭圆的.

注 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$为椭圆的充分必要条件是它有 $\mathrm{Op}(S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega))$ 拟基本解存在.

关于亚椭圆性，有一个常用的代数判据.

定理 1.5.15 *若 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 适合下面两个条件，则它必定是亚椭圆的.*

(H_1) *存在 $m_1 \leqslant m$ 使对 $x \in K \subset\subset \Omega$ 有正常数 R, C_1, C_2 存在，而当 $x \in K$，$|\xi| \geqslant R$ 时*

$$C_1 |\xi|^{m_1} \leqslant |\sigma(A)(x,\xi)| \leqslant C_2 |\xi|^m. \tag{1.5.20}$$

(H_2)
$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(A)(x,\xi)/\sigma(A)(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K} |\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad |\xi| \geqslant R,\ x \in K. \tag{1.5.21}$$

证 现证适合(H_1)，(H_2)的 $A \in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$必有拟基本解存在. 我们的作法仍是如作椭圆 PsDO 的拟基本解一样，即利用渐近展开式. 作 $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，使当$|\xi| \leqslant 1$ 时 $\chi(\xi) = 0$，$|\xi| \geqslant R$ 时 $\chi(\xi) = 1$. 以 $b_0(x,\xi) = \chi(\xi)\sigma(A)^{-1}(x,\xi) \in S^{-m}_{\rho,\delta}(\Omega)$为象征作 $B_0 \in \mathrm{Op}(S^{-m_1}_{\rho,\delta}(\Omega))$，则

$$\sigma(B \circ A) \sim 1 + \sum_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha b_0(x,\xi) \mathrm{D}_x^\alpha \sigma(A)(x,\xi)$$
$$= 1 + r(x,\xi).$$

这里的渐近展开式是有意义的，因为与引理 1.5.3 的证明一样，

$$\partial_\xi^\alpha b_0 \cdot \mathrm{D}_x^\alpha \sigma(A) = \sum C_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k} (\sigma(A)^{-1} \partial_\xi^{\alpha_1} \sigma(A)) \cdots (\sigma(A)^{-1} \partial_\xi^{\alpha_k} \sigma(A))$$
$$\cdot (\sigma(A)^{-1} \mathrm{D}_x^\alpha \sigma(A)) \in S^{-(\rho-\delta)|\alpha|}_{\rho,\delta}(\Omega),$$

这里 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leqslant |\alpha|$，$|\xi|$充分大. 所以 $r(x,\xi) \in S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega)$. 以 $r(x,\xi)$为象征作 $R(x,\mathrm{D}) \in \mathrm{Op}(S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\Omega))$. 再作 Neumann 级数

$$C_0 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j R^j,$$

并令 $C_0 \circ B_0 = B$，则与定理 1.5.2 的证法一样可得 B 为 A 的拟基本解.

下面看两个例子.

例 1 热算子$\partial_t - \Delta_x$. 它的象征是 $\mathrm{i}\xi_0 + |\xi|^2$，所以取 $m = 2$，$m_1 = 1$ 易见(H_1)，(H_2)成立.

例 2 $1 + |x|^{2\nu}(-\Delta)^\mu$($\mu,\nu$ 是非负整数). 它的象征是 $1 + |x|^{2\nu}|\xi|^{2\mu}$，所以令 $m = 2\mu$，$m_1 = 0$ 易见(H_1)成立. 令 $\rho = 1$，$\delta = \mu/\nu$也易见(H_2)成立，所以它也是亚椭圆的.

但还有许多不适合(H_1)，(H_2)的亚椭圆算子. 著名的例子是

Kolmogorov算子

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_3}.$$

A. N. Kolmogorov [Kol]证明了它具有基本解，因此是亚椭圆的，但它的象征是

$$\sigma(A) = -\xi_1^2 + \mathrm{i}x_1\xi_2 - \mathrm{i}\xi_3.$$

若令$(x,\xi)=(0,x_2,x_3;0,\xi_2,0)$，则$\sigma(A)=0$，所以它不可能满足$(H_1)$.

这个例子以及例2中(μ,ν)取其他值的情况，都引导出 Hörmander 所研究的一大类亚椭圆算子，这正是本书的重要内容之一. 所以我们在本章之末将专门讨论 Hörmander 的这一理论.

1.6 拟微分算子与 Sobolev 空间

拟微分算子 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$是 $C_0^\infty(\Omega)$到 $C^\infty(\Omega)$的连续映射，现在问它是否可以拓展为 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$上的连续映射？以下我们仍假设 $0\leqslant\delta<1$，$0<\rho\leqslant 1$ 且 $\delta<\rho$，因为下面我们仍将用到渐近展开. 上节的引理 1.5.12 (即正的椭圆 PsDO 必有近似的平方根存在) 的证明仍将起主要作用，所以我们再叙述一次：

引理 1.6.1 *设 $C\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$具有实的主象征$\sigma_0(C)(x,\xi)$使对任一紧集 $K\subset\subset\Omega$，*

$$\varliminf_{|\xi|\to\infty} \sigma_0(C)(x,\xi) > 0, \tag{1.6.1}$$

则必存在一个恰当的 $B\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$使得

$$C = B^* \circ B + R, \quad R\in \mathrm{Op}(S^{-\infty}). \tag{1.6.2}$$

这个引理当然就是引理 1.5.12. 差别在于这里的 C 就是引理 1.5.12 中的 $\mathrm{Re}\, p(x,D)=(1/2)(p(x,D)+p^*(x,D))$，后者当然具有实的主象征. 由(1.6.1) 可知必存在一个常数 $C_0>0$，使当$|\xi|>1/C_0$，$x\in K$ 时，$\sigma_0(C)(x,\xi)\geqslant C_0>0$. 所以引理 1.6.1 只不过表述更精确一点而已. 又 C 也可以设为 $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$之元，这时只需

用$|\xi|^{-m}\sigma_m(C)(x,\xi)$来代替 $\sigma_0(C)$，而 B 则在 $\mathrm{Op}(S^{m/2}_{\rho,\delta}(\Omega))$中.

由此引理立即可得

定理 1.6.2 (有界性定理) *若 $A\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$为恰当的，且存在正常数 M 使对 Ω 之任一紧集 $K\subset\subset\Omega$ 有*

$$\varlimsup_{|\xi|\to\infty} (\sup_K |\sigma_0(A)(x,\xi)|) < M, \tag{1.6.3}$$

则必存在一自伴的恰当的 $R\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$使对一切 $u\in C_0^\infty(\Omega)$有

$$\|Au\|_0^2 \leqslant M\|u\|_0^2 + (Ru,u). \tag{1.6.4}$$

特别是由此可知若 $A\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$，则 A: $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)\to L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$为有界的.

证 由 (1.6.3)知，$C=M^2-A^*\circ A$ 适合引理 1.6.1 的条件，从而存在 $B\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$和 $R\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$使得

$$A^*\circ A + B^*\circ B = M^2 + R,$$

这式子表明 R 是自伴的，且对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$有

$$(Au,Au)+(Bu,Bu) = M^2\|u\|_0^2 + (Ru,u).$$

于是 (1.6.4) 得证.

把这个定理用于一般的 PsDO 则有

定理 1.6.3 *设 $A\in \mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$，则对一切 $s\in\mathbf{R}$，A: $H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$是有界的. 若 A 还是恰当的，则 A 分别连续地映 $H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)$与 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$为其自身.*

证 因为对正则化算子定理 1.6.3 自然成立，故不妨设 A 为恰当的. 但是对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$，$\|u\|_s=\|\Lambda_s u\|_0$，$\Lambda_s$ 是以$(1+|\xi|^2)^{s/2}$为象征的 PsDO. 若 Λ_s'是相应于 Λ_s 的恰当算子，$\Lambda_s'^{-1}$是其拟基本解：$\Lambda_s'^{-1}\circ\Lambda_s'=I+R_s$，有

$$\begin{aligned}\|Au\|_{s-m} &= \|\Lambda_{s-m}Au\|_0 \\ &\leqslant \|\Lambda_{s-m}A\Lambda_s'^{-1}\circ\Lambda_s'u\|_0 + \|\Lambda_{s-m}AR_s u\|_0.\end{aligned}$$

但是 $\Lambda_{s-m}A\Lambda_s'^{-1}\in \mathrm{Op}(S^0_{\rho,\delta}(\Omega))$，$\Lambda_{s-m}AR_s\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$，用 $\Lambda_s'u$ 作为定理 1.6.2 中的 u 即得定理之证.

上述关于 PsDO 的有界性定理使得有可能重新定义 Sobolev 空间.

定理 1.6.4 *设 $s\in\mathbf{R}$，则 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 与下述命题等价：$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 且对一切恰当的 $A\in Op(S^s_{\rho,\delta}(\Omega))$，$Au\in L^2_{loc}(\Omega)$，而且 $\|\varphi Au\|_0$，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 为一族半范，定义的拓扑与 $H^s_{loc}(\Omega)$ 原有的拓扑一致.*

证 若 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$，则定理 1.6.3 表明 $Au\in L^2_{loc}(\Omega)$，且对一切 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 必存在 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ 与常数 C 使

$$\|\varphi Au\|_0\leqslant C\|\psi u\|_s,\quad u\in H^s_{loc}(\Omega).$$

反之，取 $A\in Op(S^s_{\rho,\delta}(\Omega))$ 为恰当的椭圆PsDO，其拟基本解为 B，则对 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 有

$$u=B\circ Au+Ru,\quad R\in Op(S^{-\infty}).$$

故若 $Au\in L^2_{loc}(\Omega)$，自然有 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$，且由定理 1.6.3 可知对任一 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 必有常数 $C>0$ 以及 $\psi_1,\psi_2\in C_0^\infty(\Omega)$ 使

$$\|\varphi u\|_s\leqslant C(\|\psi_1 Au\|_0+\|\psi_2 Ru\|_0).$$

定理证毕.

椭圆算子的正则性（定理 1.5.4 即 Weyl-Schwartz 定理）在 Sobolev 空间框架下亦可进一步精确化，即有

定理 1.6.5 *设 $A\in Op(S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ 是恰当的椭圆 PsDO，则有*

1) *$Au\in H^s_{loc}(\Omega)$，如果 $u\in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$；*

2) *$Au\in C^\infty(\Omega)$，如果 $u\in C^\infty(\Omega)$，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$；*

3) *对任意 $s,t\in\mathbf{R}$ 以及 Ω 之任一紧子集 $K\subset\subset\Omega$，必存在常数 $C>0$ 使*

$$\|u\|_{s+m}\leqslant C(\|Au\|_s+\|u\|_t),\quad u\in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\,u\subset K. \tag{1.6.5}$$

证 令 B 为 A 的拟基本解，则对一切 $u\in\mathscr{D}'$，

$$u=B\circ Au+Ru,\quad R\in Op(S^{-\infty}),$$

由此立即可得 1),2),3).

特别值得注意的是不等式(1.6.5). 若 A 是亚椭圆算子，且适合(H_1)，则(1.6.5) 在将左方改成 $\|u\|_{s+m_1}$ 后仍成立. 若 $m_1=m$，亚椭圆性就是椭圆性；若 $m_1<m$，记 $\delta=m-m_1$ 将有

$$\|u\|_{s+m-\delta}\leqslant C(\|Au\|_s+\|u\|_t). \tag{1.6.6}$$

与(1.6.5) 比较我们说光滑性损失了 δ. 这种光滑性的损失在许多问题中都会遇到，因此我们特别将以下类型的 PsDO 划为一类：若

$$u\in\mathscr{D}'(\Omega),\ Au\in H^s_{loc}(\Omega)\Rightarrow u\in H^{s+m-\delta}_{loc}(\Omega),\ 0<\delta<1,$$

则称 A 为次椭圆(sub-elliptic)算子. (1.6.6)型的不等式也时常称为次椭圆估计. 我们规定 $0<\delta<1$ 是为了使这个性质与 A 的低阶项无关. 次椭圆性问题将是本书的重要内容.

1.7 Hörmander 平方和定理

Hörmander [Hö1]研究了一类算子

$$A=\sum_{j=1}^m X_j^2(x)+X_0(x)+c(x) \tag{1.7.1}$$

的亚椭圆性. 它包括了很多在前面未能包括的算子，如 Kolmogorov 算子. 它是一个很重要的模型. 对它的研究联系到数学的一些其他分支 如复分析和几何，联系到在本书中占有重要地位的一些问题，因此专门划分列为一节来讨论.

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一开区域，$X_0,X_1,\cdots,X_m$ 是 Ω 上的一组实 C^∞ 向量场，即有

$$X_j(x)=\sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\partial_{x_k},\quad j=0,1,\cdots,m, \tag{1.7.2}$$

$a_{jk}(x)\in C^\infty(\Omega)$取实值（但 $c(x)$不一定取实值）. 本节讨论的问题是局部问题，因此也不妨认为 $X_j(x)$是定义在 C^∞ 流形上，因为局部地看来，C^∞ 流形和 $\mathbf{R}^n$ 是相同的.

若 X,Y 是两个向量场，我们定义其交换子为

$$[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X.$$

容易看到，交换子作为一种乘积来看对每个变元分别是线性的，而且是反对称的：

$$[X,Y]=-[Y,X],$$

而且适合 Jacobi 关系式：即对三个向量场 X,Y,Z 必有

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

因此，一切向量场的集合不但对实数域是一个向量空间，而且关于交换子构成一个 Lie 代数. 所谓由 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 所生成的子 Lie 代数（记为 $\mathscr{X}$），即由有限重交换子积

$$[X_{j_1}, [X_{j_2}, \cdots, [X_{j_{k-1}}, X_{j_k}]\cdots]]$$

所张的线性空间，其元素仍然是 Ω 上的实 C^∞ 向量场.

若 $X(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\partial_{x_k} \in \mathscr{X}$, $x_0 \in \Omega$，则

$$X(x_0) = \sum_{k=1}^n a_k(x_0)\partial_{x_k} \in T_{x_0}\Omega\ (= \mathbf{R}^n).$$

将 $\mathscr{X}$ 的元素之系数均"凝固"于 x_0 点，记之为 $\mathscr{X}(x_0)$，将得到 $T_{x_0}\Omega$ 的一个子空间，其维数 $\dim \mathscr{X}(x_0)$ 是与 x_0 有关的.

关于算子(1.7.1)有以下的

定理 1.7.1（Hörmander 平方和定理） 设对

$$A = \sum_{j=1}^m X_j^2(x) + X_0(x) + c(x),$$

对一切 $x_0 \in \Omega$，$\dim \mathscr{X}(x_0) = n$，则 A 是亚椭圆算子.

这个定理证明较长，我们将分几步来给出. 先看几个例子：

例 1 Kolmogorov 算子，即在 $\mathbf{R}^3$ 上的

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$$

可以写成

$$A = X_1^2 + X_0, \quad X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_0 = x_1\partial_{x_2} - \partial_{x_3}.$$

因为 $[X_1, X_0] = \partial_{x_2}$，故在任一点 x_0，$X_1, [X_1, X_0], x_1[X_1, X_0] - X_0 = \partial_{x_3}$ 生成 $T_{x_0}\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3$，而且它们处处线性无关，所以 $\dim \mathscr{X}(x_0) = 3$，而定理 1.7.1 的条件成立. 所以 Kolmogorov 算子是亚椭圆的，这与已知结果是符合的.

例 2 Heisenberg 群上的 Laplace 算子. 所谓 n 阶 Heisenberg 群 H^n 是一个 Lie 群，其基础流形是 $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$，局部坐标为 $(z,t) = (x+iy, t)$，这里 $z \in \mathbf{C}^n$，群运算是

$$(z,t)\circ(z',t') = (z+z', t+t'+2\,\mathrm{Im}\, z\cdot \bar{z}').$$

令 $X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t$, $Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$, $j = 1,2,\cdots,n$, $T = \partial_t$，则 X_j, Y_j 是 H^n 上的左不变向量场，而且

$$[Y_j, X_k] = 4\delta_{jk}T, \quad [X_j, X_k] = [Y_j, Y_k] = 0,$$
$$[X_j, T] = [Y_j, T] = 0.$$

因此 H^n 的 Lie 代数即由 X_j, Y_j, T, $j = 1,2,\cdots,n$ 和它们的交换子生成，而 $\dim \mathscr{X} = \dim H^n = 2n+1$. 因此

$$\mathscr{L} = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$$

是亚椭圆算子.

定理 1.7.1 的证明将分成几个引理来给出.

引理 1.7.2 *设 A 为(1.7.1)中的算子，则对 Ω 之任一紧子集 $K \subset\subset \Omega$ 以及任意 $s \in \mathbf{R}$，必存在常数 $C(K,s) > 0$ 使对一切 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 有*

$$\sum_{j=1}^m \| X_j u \|_s^2 + \| X_0 u \|_{s-1/2}^2 \leqslant C(\| Au \|_s^2 + \| u \|_s^2). \tag{1.7.3}$$

证 先对 $s = 0$ 证明上式. 因为 X_j 是实的，所以其伴算子为 $X_j^* = -X_j + a_j(x)$，而

$$|\mathrm{Re}\,(X_j u, u)| = \left|\frac{1}{2}(u, a_j u)\right| \leqslant C_j \| u \|_0^2.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(Au, u) &= \mathrm{Re}\sum_{j=1}^m (X_j^2 u, u) + \mathrm{Re}\,(X_0 u, u) + \mathrm{Re}\,(cu, u) \\ &= -\sum_{j=1}^m (\| X_j u \|_0^2) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^m (X_j u, a_j u) \\ &\quad + \mathrm{Re}\,(X_0 u, u) + \mathrm{Re}\,(cu, u),\end{aligned}$$

而有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \| X_j u \|_0^2 &\leqslant C(|(Au, u)| + \| u \|_0^2) \\ &\leqslant C(\| Au \|_0^2 + \| u \|_0^2).\end{aligned} \tag{1.7.4}$$

令 Λ_s 为相应于象征 $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ 的 PsDO，则

$$\|X_0u\|_{-1/2}^2=\|\Lambda_{-1/2}X_0u\|_0^2=(X_0u,\Lambda_{-1/2}X_0^*\Lambda_{-1/2}u)$$
$$=(Au,\Lambda_{-1/2}X_0^*\Lambda_{-1/2}u)-\sum_{j=1}^m(X_j^2u,\Lambda_{-1/2}X_0^*\Lambda_{-1/2}u)$$
$$-(cu,\Lambda_{-1/2}X_0^*\Lambda_{-1/2}u),$$

由算子的复合运算，$T_0=\Lambda_{-1/2}X_0^*\Lambda_{-1/2}\in Op(S_{1,0}^0(\Omega))$，故由 PsDO 在 Sobolev 空间上的连续性(定理 1.6.3)有

$$\|X_0u\|_{-1/2}^2\leqslant C(|(Au,T_0u)|+\|u\|_0^2)$$
$$\leqslant C(\|Au\|_0^2+\|u\|_0^2). \tag{1.7.5}$$

合并(1.7.4)与(1.7.5)就是引理中 $s=0$ 的情况. 对一般的 $s\in\mathbf{R}$, $s\neq 0$，我们需要以下两个公式：

$$[A,\Lambda_s]=\sum_{j=1}^m R_j^sX_j+R_0^s,\quad R_j^s\in Op(S_{1,0}^s(\Omega)),\ j=0,1,\cdots,m;$$
$$[X_j,\Lambda_s]\in Op(S_{1,0}^s(\Omega)),\quad j=0,1,\cdots,m.$$

这都可以通过直接计算得到. 令 $v=\Lambda_su$，则因 $u\in C_0(K)$，由Paley-Wiener 定理易证 $v\in C_0(K')$，因此可以利用 $s=0$ 时的结果而有

$$\sum_{j=1}^m\|X_ju\|_s^2+\|X_0u\|_{s-1/2}^2$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^m(\|\Lambda_{-s}X_jv\|_s^2+\|[X_j,\Lambda_{-s}]v\|_s^2)$$
$$+\|\Lambda_{-s}X_0v\|_{s-1/2}^2+\|[X_0,\Lambda_{-s}]v\|_{s-1/2}^2$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^m\|X_jv\|_0^2+\|X_jv\|_{-1/2}^2+C\|v\|_0^2$$
$$(\text{注意 } \|v\|_{-1/2}\leqslant\|v\|_0)$$
$$\leqslant C(|(Av,\widetilde{T}_0v)|+\|u\|_s^2)$$
$$\leqslant C\Big(|(\Lambda_sAu,\widetilde{T}_0\Lambda_su)|+\sum_{j=1}^m|(R_j^sX_ju,\widetilde{T}_0\Lambda_su)|$$
$$+|(R_0^su,\widetilde{T}_0\Lambda_su)|+\|u\|_s^2\Big)$$
$$\leqslant C(\|Au\|_s^2+\varepsilon\sum_{j=1}^m\|X_ju\|_s^2+C_\varepsilon\|u\|_s^2).$$

取 ε 充分小，并将 $C\varepsilon\sum_{j=1}^m\|X_ju\|_s^2$ 移到式左即得引理之证.

引理 1.7.3 设 A 是定理 1.7.1 中的算子，则对 Ω 之紧子集 $K\subset\subset\Omega$ 以及自然数 l，存在常数 $C(k,l)>0$ 和 $\varepsilon(l)>0$ 使得对一切 $u\in C_0^\infty(K)$ 均有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|X_\alpha u\|_{\varepsilon-1}^2\leqslant C(\|Au\|_0^2+\|u\|_0^2), \tag{1.7.6}$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\in\mathbf{N}^k$，$0\leqslant\alpha_i\leqslant m$，$\alpha$ 之长度为 k，X_α 是 k 重交换子：

$$X_\alpha=[X_{\alpha_1},\cdots,[X_{\alpha_{k-1}},X_{\alpha_k}]\cdots].$$

证 我们用归纳法证明. 当 α 之长为 1 时，取 $0<\varepsilon(1)\leqslant1/2$，由引理 1.7.2 可得(1.7.6)式. 设对长度为 k 的 α 以及 $0<\varepsilon(k)\leqslant1/2$ 已证明了(1.7.6)，现在对长为 $k+1$ 的 α 求 $\varepsilon(k+1)>0$ 使(1.7.6)成立. 于是设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha')$，$\alpha'$之长为 k，即

$$X_\alpha=[X_j,X_{\alpha'}],\quad j=0,1,\cdots,m.$$

先看 $j=1,2,\cdots,m$ 的情况.

$$\|X_\alpha u\|_{\varepsilon-1}^2=(X_\alpha u,\Lambda_{2\varepsilon-2}X_\alpha u)$$
$$=(X_jX_{\alpha'}u,T^{2\varepsilon-1}u)-(X_{\alpha'}X_ju,T^{2\varepsilon-1}u)$$
$$\leqslant|(X_{\alpha'}u,T^{2\varepsilon-1}X_ju)|+|(X_{\alpha'}u,\widetilde{T}^{2\varepsilon-1}u)|$$
$$+|(X_ju,T^{2\varepsilon-1}X_{\alpha'}u)|+|(X_ju,\widetilde{T}^{2\varepsilon-1}u)|$$
$$\leqslant C(\|X_ju\|_0^2+\|X_{\alpha'}u\|_{2\varepsilon-1}^2+\|u\|_{2\varepsilon-1}^2+\|u\|_0^2).$$

现在取 $\varepsilon=\varepsilon(k+1)\leqslant\varepsilon(k)/2$，则对 $\|X_{\alpha'}u\|_{2\varepsilon-1}^2\leqslant\|X_{\alpha'}^2u\|_{\varepsilon(k)-1}^2$ 可应用归纳假设；又因 $2\varepsilon-1\leqslant0$ 从而 $\|u\|_{2\varepsilon-1}^2\leqslant\|u\|_0^2$；对于第一项 $\|X_ju\|_0^2$，则因当 $\varepsilon=1/2$ 而 α 之长为 1 时已证明了(1.7.6)即

$$\|X_ju\|_0^2\leqslant C(\|Au\|_0^2+\|u\|_0^2).$$

合并这三项即知当 $X=X_j$，$j=1,2,\cdots,m$ 时(1.7.6)成立.

当 $X=X_0$ 时，同引理 1.7.2 的证法一样，可知当 $0<\varepsilon(k+1)\leqslant\varepsilon(k)/4$ 时(1.7.6)成立. 总之，取 $\varepsilon(k)=4^{-k}$即得引理1.7.3之证.

注 利用交换子技巧作估计，如同引理 1.7.2 一样可以证明，对任意的 $s\in\mathbf{R}$，存在 $C(K,l,s)>0$ 使对一切 $u\in C_0^\infty(K)$，

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|X_\alpha u\|_{s+\epsilon-1}^2\leqslant C(\|Au\|_s^2+\|u\|_s^2). \qquad (1.7.7)$$

引理 1.7.4 *设对一切 $x_0\in\Omega$, $\dim\mathscr{X}(x_0)=n$, 则对 Ω 之一切紧子集 $K\subset\subset\Omega$, 必存在一自然数 $r(K)$, 使对一切 $s\in\mathbf{R}$, 有 $C(K,s)>0$ 存在, 而对所有 $u\in C_0^\infty(K)$,*

$$\|u\|_{1+s}^2\leqslant C(K,s)\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant r(K)}\|X_\alpha u\|_s^2+\|u\|_s^2\Big). \qquad (1.7.8)$$

证 由于 $\dim\mathscr{X}(x_0)=n$, 故必存在自然数 $r(x_0)$ 使

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r(x_0)}|X_\alpha(x_0,\xi)|>0,\quad \xi\neq 0.$$

因为 $X_\alpha(x,\xi)$ 关于 ξ 是一阶正齐次函数, 故在 x_0 的充分小邻域 $O(x_0)$ 中有

$$1+\sum_{|\alpha|\leqslant r(x_0)}|X_\alpha(x,\xi)|^2\geqslant C_0(1+|\xi|^2),$$

这里 $(x,\xi)\in O(x_0)\times\mathbf{R}^n$, $C_0>0$. 在 $\{O(x_0)\}$ 中选 K 的一个有限覆盖 $O(x_1),\cdots,O(x_l)$, 而以 $\inf\limits_{1\leqslant j\leqslant l}r(x_j)=r(K)$ 即有

$$1+\sum_{|\alpha|\leqslant r(K)}|X_\alpha(x,\xi)|^2\geqslant C(1+|\xi|^2),$$

$(x,\xi)\in K\times\mathbf{R}^n$. 所以 $1+\sum_{|\alpha|\leqslant r(K)}X_\alpha^2$ 是一个强椭圆算子. 利用 Gårding不等式即可得到引理 1.7.4.

综合(1.7.7) 与(1.7.8) 即得下面的不等式:

$$\|u\|_{s+\epsilon}^2\leqslant C(\|Au\|_s^2+\|u\|_s^2),\quad u\in C_0^\infty(K), \qquad (1.7.9)$$

这里 $\epsilon=\epsilon(K)>0$, $C=C(K,s)$. 这是一个次椭圆估计式. 利用这几个引理立即可以证明

定理 1.7.5 *设 A 是定理 1.7.1 中的算子, $\dim\mathscr{X}(x_0)=n$, $x_0\in\Omega$, 若 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 满足 $Au\in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$, 则有*

$$\|\varphi u\|_{s+\epsilon(K)}^2\leqslant C(K,s)(\|\varphi_1 Au\|_s^2+\|\varphi_1 u\|_r^2), \qquad (1.7.10)$$

这里 $\varphi,\varphi_1\in C_0^\infty(K)$ 且当 $x\in\operatorname{supp}\varphi$ 时 $\varphi_1(x)\equiv 1$, $\epsilon(K)>0$.

这个定理留给读者自行证明.

Hörmander 平方和定理证明的完成 现由(1.7.10)证明 A 的亚椭圆性. 若 $Au\in C^\infty$, 则对一切 $s\in R$ 有 $Au\in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$. 而由(1.7.10)可得 $u\in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$, 再由嵌入定理即得 $u\in C^\infty(\Omega)$. 证毕.

定理 1.5.14 指出, 拟基本解的存在是亚椭圆性的一个充分条件. 但这个拟基本解不一定是 $\mathrm{Op}(S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega))$类的 PsDO, 否则算子不仅是亚椭圆的, 而且是椭圆的. 例如 Kolmogorov 算子是有拟基本解的, 以后我们也将用一般的奇异积分算子来构造 Hörmander 算子的拟基本解. 这里我们则是用一种先验估计——次椭圆估计(1.7.10) ——来证明 A 的亚椭圆性. 这是一种很重要的方法.

Hörmander 平方和定理有一些其他的推广, 连同定理 1.7.1 的详细证明, 可以参看 O. A. Oleinik 和 E. V. Radkevic [O-R].

第 2 章　仿微分算子理论

拟微分算子理论自 20 世纪 60 年代中期出现以来，在解决线性偏微分方程理论中的许多深刻的问题上起了重要的作用．自 80 年代初，这个工具开始被应用到非线性偏微分方程的问题上．从事这个工作的数学家为数甚多．一个研究途径是研究有限光滑的拟微分算子．这是由于，例如对一个椭圆型方程

$$F(x,u,\cdots,D^{\alpha}u)_{|\alpha|\leqslant 2m}=f,$$

尽管 F 对其变元是 C^{∞} 的，但当右方 f 只有有限程度的光滑性时，很可能解 u 并不属于 C^{∞}，而例如属于 $C^{2m+\alpha}$．因此在将此方程线性化以后，其系数因为含有 u 及其各阶微商，不一定是 C^{∞} 的．相应于此的拟微分算子之象征自然也不一定是 C^{∞} 的．另一个重要的途径是 J.-M. Bony 所创立的仿微分算子理论．它实际上是调和分析的方法，即在 Fourier 变换域中讨论偏微分方程的解．这当然就是微局部分析的基本思想．这两种途径是统一的．因此，我们在讨论仿微分算子理论时自然要以相当的力量来讨论有限光滑的 PsDO 和 PsDO 的某些坏类(主要是指 $S^{m}_{1,1}$ 类)，这方面的研究近年来有很大的进展．

2.1　Littlewood-Paley 理论

Fourier级数理论的一个基本结果是：若 $g(x)\in L^2([0,2\pi])$，则它必可唯一地展开为 Fourier 级数，即有在 L^2 中收敛的级数

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx},\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)e^{-inx}dx,\qquad (2.1.1)$$

而且

$$\|g(x)\|_0^2=\int_0^{2\pi}|g(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2.\qquad (2.1.2)$$

反之，若有序列 $\{c_n\}$ 使级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2<+\infty$，以它们为系数作级数(2.1.1)，此级数必 L^2 收敛于某个 $g(x)\in L^2([0,2\pi])$，且(2.1.1)成立，即此级数为 $g(x)$ 之 Fourier 级数．

由于这个基本事实，Fourier 级数成了研究 L^2 函数空间的自然的工具．但对一般的 L^p 空间，$1<p<\infty$，情况又如何？L^p 与 L^2 的区别可以从以下事实看出来．对 $n\in\mathbf{Z}$，作一串实数 $\{\varepsilon_n\}$，$|\varepsilon_n|=1$，令 $c_n'=\varepsilon_n c_n$，则可定义算子 E：

$$E\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}\Big)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n' e^{inx}.\qquad (2.1.3)$$

若 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}\in L^2([0,2\pi])$，则因 $|c_n'|=|c_n|$，而有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n'|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2,$$

因而上式右方仍属于 $L^2([0,2\pi])$，而且 E：$L^2\to L^2$ 是等距的．但对于 L^p 空间，当 $p\neq 2$ 时，一个经典的结果告诉我们，即令

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}=g(x)\in L^p,\quad E(g(x))=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n' e^{inx}$$

一般说来并不属于 L^p．即令它属于 L^p，E 不但不一定是等距的，甚至不一定是有界的．这说明 Fourier 系数之模 $\{|c_n|\}$ 不足以刻画函数的 L^p 范数．

Littlewood 和 Paley 提出了一个想法，即将 Fourier 级数(2.1.1)分段，写成

$$g(x)=\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_k+\cdots,\quad \Delta_k=\sum_{\delta_k\leqslant|n|<\delta_{k+1}}c_n e^{inx},\ (2.1.4)$$

而 Δ_k 段中之项的频率 n 与 2^k 同阶，例如

$$\Delta_0=c_0,\quad \Delta_k=\sum_{c2^k\leqslant|n|<c2^{k+1}}c_n e^{inx}.$$

如果级数(2.1.1)在 $L^1([0,2\pi])$中收敛于 $g(x)\in L^1$，我们记 Δ_k 为

$\Delta_k(g)$，并定义算子

$$(\text{L-P})g(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(g)(x)|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.1.5}$$

Littlewood 和 Paley 证明了：若 $g(x)\in L^1$ 且使 $(\text{L-P})g(x)\in L^p$，则必有 $g(x)\in L^p$，而且存在常数 $A_p>0$，$B_p>0$ 使得

$$A_p\|g\|_{L^p}\leqslant\|(\text{L-P})g(x)\|_{L^p}\leqslant B_p\|g\|_{L^p}.$$

这样，L^p 空间也可以用 Fourier 级数来刻画，而且若对(2.1.4)作用以算子 E，则 $(\text{L-P})(Eg)(x)=(\text{L-P})g(x)$.

(2.1.4)称为 Littlewood-Paley 分解(以下简记为 L-P 分解)，它是一个重要的工具．例如 J. Marcinkiewicz 利用它证明了著名的乘子定理．所谓乘子定义如下：设有一个线性算子 T_m 使

$$T_m(e^{i\xi x}) = m(\xi)e^{i\xi x}.$$

若 $g(x)\in L^2\cap L^p$，则可用 Fourier 变换定义算子 T_m，

$$(T_m g)\hat{}\,(\xi) = m(\xi)\hat{g}(\xi).$$

若这样定义的 T_m：$L^2\cap L^p\to L^p$ 是有界的，则说 $m(\xi)$ 是一个 L^p 乘子．这样的 T_m 可以拓展为 $L^p\to L^p$ 的有界算子．$m(\xi)$ 是 L^p 的充分条件是什么？Marcinkiewicz 利用 L-P 分解给出一个充分条件，即 $m(\xi)\in S^0_{1,0}$．这个提法不太准确，但可以认为 L-P 分解实际上已导致了 PsDO 理论．在这里需要指出，由于 Y. Meyer 和 R. Coifman 等人的工作，L-P 分解在建立仿微分算子理论中起了重要作用．本节中我们要用 L-P 分解来刻画一些常用的函数空间.

L-P 分解有多种变体，但下面我们将使用一种特定的 L-P 分解，称为二进分解.

在 $\mathbf{R}^n_\xi=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\}$ 中，令 $B(0,1)$ 表示以 0 为心的单位球，

$$C_j=\{\xi\in\mathbf{R}^n;\ K^{-1}2^j\leqslant|\xi|\leqslant K2^{j+1}\},\quad j=0,1,\cdots, \tag{2.1.6}$$

$K>1$ 为正常数．C_j 称为二进环，$B(0,1)$ 时常记作 C_{-1}．$\{C_j\}_{j=-1,0,1,\cdots}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个覆盖，而且是局部有限的：

引理 2.1.1 *存在一个仅依赖于 K 的正整数 N_1，使 $\{C_j\}_{j=-1,0,1,\cdots}$ 中每一个环 C_p 至多与 N_1 个其他的环 C_q 相遇.*

证 固定 p，并设 $C_p\cap C_q\neq\varnothing$，先设 $p\neq-1$，若 $q\leqslant p$ 而 $\xi\in C_p\cap C_q$，则必有

$$K^{-1}2^p\leqslant|\xi|\leqslant K2^{q+1}.$$

故 $2^{p-q}\leqslant 2K^2$，$p-q\leqslant 1+2\log_2 K$．取 $1+2\log_2 K$ 之整数部分，并令

$$N'=[1+2\log_2 K]+1,$$

则适合上式且 $\leqslant p$ 的正整数 q 最多 N' 个．同样适合 $q\geqslant p$ 而 $\xi\in C_p\cap C_q$ 的 q 最多也只有 N' 个，总之，若 $p\neq-1$，则与 C_p 相交的 C_q 最多 $2N'$ 个．再看 $p=-1$，与 C_{-1} 相交的 C_q 必有交点 ξ 适合 $K^{-1}2^q\leqslant|\xi|\leqslant K$，即 $2^q\leqslant K^2$ 而 $q\leqslant 2\log_2 K<N'$．令 $N_1=2N'$ 则引理得证.

相应于这样一个局部有限覆盖，可以作出一个 C^∞ 单位分解如下：

定理 2.1.2 *存在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数 $\varphi(\xi)$ 与 $\psi(\xi)$ 使适合 $0\leqslant\varphi(\xi)$，$\psi(\xi)\leqslant 1$，而且*

1) $\operatorname{supp}\psi\subset B(0,1)$，$\operatorname{supp}\varphi\subset C_0$；

2) $$1=\psi(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n; \tag{2.1.7}$$

3) $$\psi(\xi)+\sum_{j=0}^{l-1}\varphi(2^{-j}\xi)=\psi(2^{-l}\xi). \tag{2.1.8}$$

证 作 $\psi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，使当 $|\xi|\leqslant K^{-1}$ 时 $\psi(\xi)=1$，$\operatorname{supp}\psi\subset B(0,1)$，且 $0\leqslant\psi(\xi)\leqslant 1$．这样的 ψ 当然是容易作出的，例如要求它仅依赖于 $|\xi|$ 即可．于是 $\psi(2^{-(j+1)}\xi)$ 当 $2^{-(j+1)}|\xi|\leqslant K^{-1}$ 即 $|\xi|\leqslant K^{-1}2^{j+1}$ 时为 1．考虑级数

$$\psi(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}(\psi(2^{-(j+1)}\xi)-\psi(2^{-j}\xi)).$$

则 $\psi(2^{-(j+1)}\xi)-\psi(2^{-j}\xi)$ 之支集在 C_j 内：因为若 $|\xi|\geqslant K2^{j+1}>K2^j$，则 $|2^{-j}\xi|>|2^{-(j+1)}\xi|>1$，$\psi(2^{-(j+1)}\xi)=\psi(2^{-j}\xi)=0$，若 $|\xi|\leqslant K^{-1}2^j<K^{-1}2^{j+1}$，则 $|2^{-(j+1)}\xi|<|2^{-j}\xi|\leqslant K^{-1}<1$．而

$$\psi(2^{-(j+1)}\xi)=\psi(2^{-j}\xi)=1.$$

令 $\varphi(\xi)=\psi(2^{-1}\xi)-\psi(\xi)$ 即得 1)，2)之证.

为了证明 3)，在(2.1.7)中用 $2^{-l}\xi$ 代替 ξ，即有

$$1=\psi(2^{-l}\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-l-j}\xi)$$
$$=\psi(2^{-l}\xi)+\sum_{j=l}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi)$$
$$=\psi(2^{-l}\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi)-\sum_{j=0}^{l-1}\varphi(2^{-j}\xi).$$

用(2.1.7)代替上式左方的 1，即得 3)之证明.(更简单的方法是利用$\varphi_p(\xi)=\psi(2^{-(p+1)}\xi)-\psi(2^{-p}\xi)$.)

注 1 上述的覆盖依赖于 K 的选择，单位分解的构造又有赖于 φ 与 ψ 的选择，所以 L-P 分解不是唯一的. 但后面将看到，这并不影响以后的结果.

注 2 可以仿照上面的方法作出连续的单位分解. 仍取 $\psi(\xi)$ 如上，然后由下式来定义 $\varphi(\xi)$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi\left(\frac{\xi}{t}\right)=\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right),\tag{2.1.9}$$

亦即

$$\varphi(\xi)=-\langle\xi,\mathrm{grad}\,\psi(\xi)\rangle.$$

在(2.1.9)中令 $t=1$ 即知 $\mathrm{supp}\,\varphi\subset\{\xi;\ K^{-1}\leqslant|\xi|\leqslant1\}\subset C_0$. 将(2.1.9)式对 t 自 1 到$+\infty$积分，即有

$$1=\psi(\xi)+\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)\mathrm{d}t.\tag{2.1.10}$$

这就是相应于(2.1.7)的连续的单位分解. 在(2.1.10)中用 ξ/τ ($\tau>0$)代替 ξ，有

$$1=\psi\left(\frac{\xi}{\tau}\right)+\int_1^{\infty}\frac{1}{t\tau}\varphi\left(\frac{\xi}{t\tau}\right)\mathrm{d}(t\tau)=\psi\left(\frac{\xi}{\tau}\right)+\int_\tau^{\infty}\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

与(2.1.10)相减，即得(2.1.8)的对应公式

$$\psi(\xi)+\int_1^{\tau}\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)\mathrm{d}t=\psi\left(\frac{\xi}{\tau}\right).\tag{2.1.11}$$

应用这个单位分解，即可得缓增分布的 L-P 分解.

定义 2.1.3 *设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则可得到 u 的 L-P 分解(或称二进分解、环形分解)：*

$$u=\sum_{p=-1}^{\infty}u_p(x),\tag{2.1.12}$$

其中 $\hat{u}_{-1}(\xi)=\psi(\xi)\hat{u}(\xi)$，$\hat{u}_p(\xi)=\varphi_p(\xi)\hat{u}(\xi)=\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)$. 级数(2.1.12)在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$意义下收敛.

要注意，因 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，$\hat{u}(\xi)$也有意义且仍在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中，因而 $\hat{u}_p(\xi)$以及 $u_p(x)$，$p=-1,0,1,\cdots$，也都在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中. 由于单位分解(2.1.7)对应于局部有限的覆盖，容易证明(2.1.12)确在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中收敛，因此我们将这个结论归入定义之中而以后即不再证明收敛性.

由于 $\varphi_p(\xi)=\varphi(2^{-p}\xi)$和 $\psi(\xi)$均有紧支集，$\hat{u}_p(\xi)$，$p=-1,0,1,\cdots$亦然，从而 $u_p(x)$，由 Paley-Wiener-Schwartz 定理，是有一定的增长性的整函数在 $\mathbf{R}^n$ 上的限制，从而是 C^∞的，而且在∞附近有一定的增长性. 可见，L-P 分解的实质是利用 $\hat{u}(\xi)$的谱的增长性质来讨论 $u(x)$的正则性，即将 $u(x)$的奇异性归结为其频谱 $\hat{u}(\xi)$的研究，即归结为高频成分($\hat{u}_p(\xi)$，p 充分大). 因此，若在级数(2.1.12)中将相应于高频的成分略去，即可将 $u(x)$的奇异性成分略去.

还要提到，因为 $\psi(\xi)$和 $\varphi_p(\xi)$均属于 $S^0_{1,0}(\mathbf{R}^n)$（实际上属于 $S^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$），所以

$$u_{-1}(x)=\psi(\mathrm{D})u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\psi(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$u_p(x)=\varphi_p(\mathrm{D})u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\varphi_p(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $p=0,1,\cdots$. 即是说 L-P 分解可以利用 PsDO 来实现.

L-P 分解提供了研究各种函数空间的一个统一的框架. 下面我们将详细讨论最常用的两种空间，即 Sobolev 空间和 Hölder 空间. 先讨论 Sobolev 空间，我们用 $\|\cdot\|_s$ 表示 Sobolev 空间 H^s 的模，特别地，$\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L^2}$.

定理 2.1.4 *令 $s>0$，则以下诸命题等价：*

1) $u\in H^s(\mathbf{R}^n)$.

2) *$u=\sum_{p=-1}^{\infty}u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛，$u_p(x)\in C^\infty$；且对一切 p，*

supp $\hat{u}_p \subset C_p$，并满足估计式

$$\|u_p\|_0 \leqslant c_p 2^{-ps}, \quad \{c_p\} \in l^2. \tag{2.1.13}$$

3） $u = \sum_{p=-1}^{\infty} u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛，$u_p(x) \in C^{\infty}$；且对一切 p，supp $\hat{u}_p \subset B(0, K_1 2^p)$，并满足估计式

$$\|u_p\|_0 \leqslant c_p 2^{-ps}, \quad \{c_p\} \in l^2. \tag{2.1.14}$$

4） $u = \sum_{p=-1}^{\infty} u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛，$u_p(x) \in C^{\infty}$；且对一切 $\alpha \in \mathbf{N}^n$，满足估计式

$$\|D^{\alpha} u_p\|_0 \leqslant c_{p,\alpha} 2^{-p(s-|\alpha|)}, \quad \{c_{p,\alpha}\} \in l^2. \tag{2.1.15}$$

证 1)⇔2)．这一部分的证明对一切实数 s（不仅是 $s>0$）均成立．实际上，若 $u \in H^s(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，作其 L-P 分解，自然有 $u_p(x) \in C^{\infty}$，且 $u = \sum u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛．由引理 2.1.1，当 $|p-q| \geqslant N_1$ 时 $C_p \cap C_q = \varnothing$．记

$$S_q u = \sum_{k=0}^{\infty} u_{q+kN_1},$$

则上式中任二项之 Fourier 变换之支集不相交，因而 $(S_q u)\hat{}$ 有意义，而且

$$\|S_q u\|_s^2 = \int (1+|\xi|^2)^s |(S_q u)\hat{}|^2 d\xi$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_{q+kN_1}|^2 d\xi$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \|u_{q+kN_1}\|_s^2, \tag{2.1.16}$$

但是

$$|(S_q u)\hat{}| = \left|\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{q+kN_1}\right)\hat{u}(\xi)\right|^2 \leqslant |\hat{u}(\xi)|^2$$

（可能 $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{q+kN_1}$ 要改成 $\psi + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{q+kN_1}$，但上式结果不变），所以

$$\|S_q u\|_s^2 \leqslant \|u\|_s^2. \tag{2.1.17}$$

若 $s>0$，则

$$\|u_p\|_s^2 = \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_p(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_{C_p} (1+|\xi|^2)^s |\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\geqslant (1+K^{-2}2^{2p})^s \int |\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\geqslant K_1 2^{2ps} \|u_p\|_0^2.$$

若 $s<0$，则由于在 C_p 上 $|\xi| \leqslant K2^{p+1}$，代入上式又有

$$\|u_p\|_s^2 \geqslant (1+K^2 2^{2(p+1)})^s \|u_p\|_0^2$$
$$\geqslant K_1^2 2^{2ps} \|u_p\|_0^2.$$

用同样的方法也可证明对一切 $s \in \mathbf{R}$，存在正数 $K_2>0$ 使

$$\|u_p\|_s^2 \leqslant K_2^2 2^{2ps} \|u_p\|_0^2.$$

总之，对一切实数 s 有

$$K_1^2 \|u_p\|_0^2 \leqslant 2^{-2ps} \|u_p\|_s^2 \leqslant K_2^2 \|u_p\|_0^2. \tag{2.1.18}$$

将(2.1.18)代入(2.1.16)，利用(2.1.17)，

$$\sum_{k=0}^{\infty} K_1 2^{2(q+kN_1)s} \|u_{q+kN_1}\|_0^2 \leqslant \|S_q u\|_s^2 \leqslant \|u\|_s^2,$$

再对 q 求和，即得

$$\sum_{p=-1}^{\infty} K_1 2^{2ps} \|u_p\|_0^2 \leqslant \sum_{q=0}^{N_1-1} \|S_q u\|_s^2 \leqslant N_1 \|u\|_s^2.$$

令 $c_p = 2^{ps}\|u_p\|_0$，则上式表明 $\{c_p\} \in l^2$，而 $\|u_p\|_0 = c_p 2^{-ps}$，这就是 2)．所以 1)⇒2)．

再证 2)⇒1)．对任一适合 2)中诸条件的分解，仿上面证明(2.1.18)的方法，并令 $c_p = 2^{ps}\|u_p\|_0$，有

$$\|u_p\|_s^2 \leqslant K_2 c_p^2, \quad \{c_p\} \in l^2.$$

所以

$$\sum_{q=0}^{N_1-1} \|S_q u\|_s^2 \leqslant \sum_{q=0}^{N_1-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|u_{q+kN_1}\|_s^2\right) = \sum_{p=-1}^{\infty} \|u_p\|_s^2$$
$$\leqslant K_2 \sum_{p=-1}^{\infty} c_p^2 < +\infty.$$

故 $u = \sum_{q=0}^{N_1-1} S_q u \in H^s(\mathbf{R}^n)$．

2)⇒3)是显然的．因为 $C_p \subset B(0, 2K2^{2p})$．令 $K_1 = 2K$ 即得．

3)⇒4)．由3)中的分解 $u=\sum_{p=-1}^{\infty}u_p$，$u_p\in C^{\infty}$ 且 $\hat{u}_p$ 有紧支集，故对一切 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 有

$$\begin{aligned}\|D^{\alpha}u_p\|_0&=\|(D^{\alpha}u_p)^{\wedge}\|_0=\|\xi^{\alpha}\hat{u}_p(\xi)\|_0\\&\leqslant K_1^{|\alpha|}2^{p|\alpha|}\|\hat{u}_p\|_0^2=K_1^{|\alpha|}2^{p|\alpha|}\|u_p\|_0^2\\&\leqslant K_1^{|\alpha|}c_p2^{-ps+p|\alpha|}=c_{p,\alpha}2^{-p(s-|\alpha|)},\end{aligned}$$

这里 $c_{p,\alpha}=K_1^{|\alpha|}c_p$．故对于 p 而言 $\{c_{p,\alpha}\}_p\in l^2$．

以上都对于一切实数 $s\in\mathbf{R}^n$ 成立．但下面的结论只对 $s>0$ 成立．

3)⇒2)⇒1)．由3)，$\|u_p\|_0\leqslant c_p2^{-ps}\leqslant c_p$（注意 $s>0$）除了 $p=-1$ 以外均成立，但 $\{c_p\}\in l^2$，所以 $u=\sum u_p$ 在 L^2 意义下收敛，从而 $u\in L^2$．

进一步，记 $\Delta_k=\varphi(2^{-k}D)$，$k=0,1,\cdots$，注意到当 $|p-k|>N_1$ 时 $C_p\cap C_k=\varnothing$，从而 $(\Delta_ku_p)^{\wedge}=\varphi(2^{-k}\xi)\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)=0$，所以

$$v_k=\Delta_ku=\varphi(2^{-k}D)\sum_{p=-1}^{\infty}u_p=\varphi(2^{-k}D)\sum_{|p-k|\leqslant N_1}u_p.$$

再令 $v_{-1}=\psi(D)u$，则有分解式 $u=\sum_{k=-1}^{\infty}v_k$．我们来证明这个分解式即是2)中所要求的分解．

首先 $\operatorname{supp}\hat{v}_p\subset\operatorname{supp}\varphi(2^{-p}\xi)\subset C_p$，$\operatorname{supp}\hat{v}_{-1}\subset C_{-1}$ 是显然的，余下的只需证明一个估计式：利用 Schwartz 不等式，

$$\begin{aligned}\|v_k\|_0^2&=\Big\|\sum_{p=k-N_1}^{k+N_1}\Delta_ku_p\Big\|_0^2=\int\Big|\sum_{p=k-N_1}^{k+N_1}\Delta_ku_p(x)\Big|^2dx\\&\leqslant\int\Big(\sum_{p=k-N_1}^{k+N_1}2^{2ps}|\Delta_ku_p(x)|^2dx\Big)\cdot\Big(\sum_{p=k-N_1}^{k+N_1}2^{-2ps}\Big)\\&\leqslant C2^{-2ks}\sum_{p=-1}^{\infty}2^{2ps}\|\Delta_ku_p\|_0^2.\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

这里我们本质地应用了 $s>0$，才可得到

$$\sum_{p=k-N_1}^{k+N_1}2^{-2ps}\leqslant C2^{-2ks}.$$

和证明1)⇒2)时一样，可以证明必存在一个与 p 无关的常数 C，使

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\Delta_ku_p\|_0^2\leqslant C\|u_p\|_0^2.$$

因此，若记 $c_k=\sum_{p=-1}^{\infty}2^{2ps}\|\Delta_ku_p\|_0^2$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\leqslant C\sum_{p=-1}^{\infty}2^{2ps}\|u_p\|_0^2<\infty,$$

即 $\{c_k\}\in l^2$．代入(2.1.19)即有

$$\|v_k\|_0^2\leqslant C2^{-2ks}c_k,\quad\{Cc_k\}_k\in l^2,$$

这正是2)中所要求的估计．总之分解式 $u=\sum_{k=-1}^{\infty}v_k$ 适合2)，而3)⇒2)成立．2)⇒1)对一切 s 均已证明是成立的，故当 $s>0$ 时有3)⇒2)⇒1)．

最后证明4)⇒1)．令 $\alpha=0$，当 $p>-1$ 时

$$\|u_p\|_0\leqslant c_{p,0}2^{-ps}\leqslant c_{p,0}$$

（因为 $s>0$ 故此式除 $p=-1$ 以外均成立）．因此 $u=\sum u_p\in L^2$，而且此级数是在 L^2 意义下收敛的．令 $\psi_k(\xi)=\psi(2^{-k}\xi)$，则 $\operatorname{supp}\psi_k\subset B(0,C_12^{k+1})$，且当 $|\xi|\leqslant C_22^k$ 时 $\psi_k=1$．因此

$$\operatorname{supp}\psi_k(1-\psi_k)\subset\{\xi\in\mathbf{R}^n;\ C_22^k\leqslant|\xi|\leqslant C_12^{k+1}\}.$$

记

$$\hat{u}_k(\xi)=\psi_k(\xi)\hat{u}_k(\xi)+(1-\psi_k(\xi))\hat{u}_k(\xi)=\hat{u}_k^1(\xi)+\hat{u}_k^2(\xi).$$

这里我们记 u_k^1 为以 $\psi_k(\xi)\hat{u}_k(\xi)$ 为 Fourier 变换的广义函数．因为 $\psi_k(\xi)$ 有紧支集，故知 $u_k^1(x)\in C^{\infty}$．同样，记以 $(1-\psi_k(\xi))\hat{u}_k(\xi)$ 为 Fourier 变换的广义函数为 u_k^2，则目前我们仅知 $u_k^2\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$．下面进一步讨论 u_k^1,u_k^2 的性质．由4)之假设已知 $u_k\in L^2$，故可写出

$$\begin{aligned}\|u_k\|_0^2&=\|\hat{u}_k\|_0^2=\int|\hat{u}_k^1(\xi)+\hat{u}_k^2(\xi)|^2d\xi\\&=\int|\hat{u}_k^1(\xi)|^2d\xi+2\int\psi_k(1-\psi_k)|\hat{u}_k(\xi)|^2d\xi\\&\quad+\int|\hat{u}_k^2(\xi)|^2d\xi\\&\geqslant\int|\hat{u}_k^1(\xi)|^2d\xi+\int|\hat{u}_k^2(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

这里我们利用了 $\psi_k(1-\psi_k)\geqslant 0$，并注意到 $\hat{u}_k^1(\xi),\hat{u}_k^2(\xi)$ 均在 L^2 中．由 4)中的不等式(令 $\alpha=0$)有

$$\| u_k^1 \|_0^2 + \| u_k^2 \|_0^2 \leqslant \| u_k \|_0^2 \leqslant c_{k,0}^2 2^{-2ks}, \quad \{c_{k,0}\} \in l^2. \tag{2.1.21}$$

同样，在(2.1.20)中将每个积分的被积函数都增加一个因子 $(1+|\xi|^2)^{s_0}$，则由 4)之假设，若令 $|\alpha|=s_0>s>0$，又有 $\| u_k \|_{s_0}^2 \leqslant c_{k,s_0} 2^{-k(s-s_0)}$，$\{c_{k,s_0}\}\in l^2$．而且

$$\| u_k^1 \|_{s_0}^2 + \| u_k^2 \|_{s_0}^2 \leqslant \| u_k \|_{s_0}^2 \leqslant c_{k,s_0}^2 2^{-2k(s-s_0)}. \tag{2.1.21$_{s_0}$}$$

这里当然也意味着 $u_k^1,u_k^2\in H^{s_0}$．

下面的工作是讨论 $u^1=\sum u_k^1$，$u^2=\sum u_k^2$，并证明它们分别是适合 1)至 3)中某一条之条件，从而有 $u^1\in H^s$，$u^2\in H^s$，而4)$\Rightarrow$1)得证．

先看 $u^1=\sum u_k^1$．它在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛是自然的．因为 $\hat{u}=\sum \hat{u}_k$ 由假设在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛，各项乘以 $\psi_k(\xi)$ 后仍在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛是自明的．我们已经知道的事实是 $u_k^1\in C^\infty$ 以及

$$\operatorname{supp}\hat{u}_k^1(\xi)\subset \operatorname{supp}\psi_k(\xi)\subset B(0,C_1 2^{k+1}),$$

且 $\| u_k^1 \|_0^2\leqslant c_{k,0}^2 2^{-2ks}$，$\{c_{k,0}\}\in l^2$．所以 3)中要求全成立．由于当 $s>0$ 时 3)$\Rightarrow$1)，所以

$$u^1=\sum u_k^1\in H^s.$$

余下的是 $u^2=\sum u_k^2$．因为 $u=\sum u_k=\sum u_k^1+\sum u_k^2$，而 $\sum u_k$ 与 $\sum u_k^1$ 均在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛，故 $\sum u_k^2$ 自然也在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛．记其和为 $u^2\in\mathscr{S}'$．但关于 $\operatorname{supp}\hat{u}_k^2$ 的条件不能直接满足：

$$\operatorname{supp}\hat{u}_k^2(\xi)\subset \operatorname{supp}\{1-\psi_k(\xi)\}\subset\{\xi\in\mathbf{R}^n;\ C_2 2^k\leqslant|\xi|\},$$

即在某球的外域 B_k^* 中．所以我们对 u^2 要作另外一个分解使之适合 2)中的条件．为此，我们再使用证明 3)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$1)时用过的算子 $\Delta_p=\varphi(2^{-p}D)$．即是一个二进分解 $1=\psi(\xi)+\sum_{p=0}^{\infty}\varphi(2^{-p}\xi)$，而有

$$u^2=\psi(D)u^2+\sum_{p=0}^{\infty}\varphi(2^{-p}D)u^2=\sum_p v_p. \tag{2.1.22}$$

这里 v_{-1} 在计算上与其他 v_p 的计算略有不同，但不影响结果，所以我们略去不提．(2.1.22)自然在 $\mathscr{S}'$ 意义下收敛．

$\operatorname{supp}\hat{v}_p\subset\operatorname{supp}\varphi(2^{-p}\xi)\subset C_p$．且因 $\hat{v}_p$ 有紧支集，故 $v_p\in C^\infty$，余下的只需证明 v_p 适合一个不等式：$\| v_p \|_0\leqslant c_p 2^{-ps}$，$\{c_p\}\in l^2$．

为此，注意到 $\operatorname{supp}\varphi(2^{-p}\xi)\subset C_p$，从而只能与有限多个 B_k^*（球的外域）相交，而若 $C_p\cap B_k^*=\varnothing$，当有

$$\Delta_p u_k^2=\varphi(2^{-p}D)u_k^2=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}_k^2(\xi)d\xi=0,$$

所以必存在一个自然数 N_0 使

$$\begin{aligned}\| v_p \|_0^2 &= \| \Delta_p u^2 \|_0^2\\ &=\Big\| \sum_{k\leqslant p+N_0}\Delta_p u_k^2\Big\|_0^2=\int\Big|\sum_{k\leqslant p+N_0}(\Delta_p u_k^2)^\wedge\Big|^2 d\xi\\ &\leqslant\Big(\sum_{k\leqslant p+N_0}2^{-2k(s-s_0)}\Big)\Big(\int\sum_{k\leqslant p+N_0}2^{2k(s-s_0)}\,|(\Delta_p u_k^2)^\wedge|^2 d\xi\Big).\end{aligned}$$

但是

$$\sum_{k\leqslant p+N_0}2^{-2k(s-s_0)}=\frac{1-2^{-2(p+N_0+1)(s-s_0)}}{1-2^{-2(s-s_0)}}\leqslant C2^{-2(p+N_0+1)(s-s_0)}.$$

$$\begin{aligned}\int_{C_p}|\Delta_p\hat{u}_k^2|^2 d\xi&=\int_{C_p}(1+|\xi|^2)^{s_0}(1+|\xi|^2)^{-s_0}\,|\Delta_p\hat{u}_k^2(\xi)|^2 d\xi\\ &\leqslant C2^{-2ps_0}\,\| \Delta_p u_k^2 \|_{s_0}^2.\end{aligned}$$

代入上式即有

$$\| v_p \|_0^2\leqslant C2^{-2ps}\cdot\sum_{k\leqslant p+N_0}2^{2k(s-s_0)}\,\| \Delta_p u_k^2 \|_{s_0}^2=Cc_p^2.$$

这里，

$$\begin{aligned}\sum_p c_p^2&=\sum_k 2^{2k(s-s_0)}\sum_p\| \Delta_p u_k^2 \|_{s_0}^2\\ &\leqslant\sum_k 2^{2k(s-s_0)}\,\| u_k^2 \|_{s_0}^2\leqslant\sum_k 2^{2k(s-s_0)}\,\| u_k \|_{s_0}^2\\ &\leqslant\sum_k 2^{2k(s-s_0)}c_{k,s_0}^2\,2^{-2k(s-s_0)}\\ &=\sum_k c_{k,s_0}^2<+\infty.\end{aligned}$$

这里我们利用了$(2.1.21)_{s_0}$式.

于是分解式(2.1.22)适合 2)中的一切条件，而由 2)⇒1)知 $u^2\in H^s$.

定理证毕.

注 此定理的 2)中的分解原不一定是 L-P 分解，而泛指一切适合其中各条件的分解. 所以证明 1)⇒2)时可以证明 u 之 L-P 分解适合 2)中诸条件，而证明 2)⇒1)时则需从任一适合这些条件的分解开始. 实际上，对 L-P 分解可以取 2)中的 c_p 使之适合

$$\left(\sum c_p^2\right)^{1/2}\leqslant C\|u\|_s.$$

实际上，对于 $p\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}2^{2ps}\|u_p\|_0^2&=2^{2ps}\int|\varphi(2^{-p}\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&=\int[2^{2ps}(1+|\xi|^2)^{-s}]|\varphi(2^{-p}\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&\leqslant C^2\int\varphi(2^{-p}\xi)(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&=c_p^2.\end{aligned}$$

这是因为上述积分实际上是在环 C_p 上进行，故在其上 $1+|\xi|^2\sim 2^{-2p}$，又因$\{\varphi\}$是单位分解，故$|\varphi(2^{-p}\xi)|^2\leqslant\varphi(2^{-p}\xi)$. 记上式右方为 c_p^2. 同样当 $p=-1$ 时也有

$$2^{2s}\|u_{-1}\|_0^2\leqslant C^2\int\psi(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=c_{-1}^2,$$

这样

$$\begin{aligned}\sum_{p=-1}^{\infty}c_p^2&\leqslant C^2\int\left(\psi(\xi)+\sum_{p=0}^{\infty}\varphi(2^{-p}\xi)\right)(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&=C^2\|u\|_s^2.\end{aligned}$$

L-P 分解不但刻画了 Sobolev 空间，而且为研究其性质，例如嵌入定理，提供了新的方法. 详见下一段关于 Hölder 空间的讨论.

Hölder 空间 $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$是非线性偏微分方程理论中常用的空间. 简言之，这就是满足 α 阶(如果 $0<\alpha<1$) Hölder 条件的函数所成的空间:

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha,$$

而适合上式的"最小"的 C 就是$\sup\limits_{x\neq y}(|u(x)-u(y)|/|x-y|^\alpha)$. 我们对 C^α 空间赋以范数

$$|u|_\alpha=\sup_x|u(x)|+\sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.\tag{2.1.23}$$

于是 C^α 按以上的范数成为 Banach 空间. 对于一般的 $\alpha\in\mathbf{R}_+\backslash\mathbf{N}$，令 $[\alpha]=k$，则 $\alpha=k+\beta$，$0<\beta<1$，我们给出

定义 2.1.5 *若 $\alpha\in\mathbf{R}_+\backslash\mathbf{N}$，$\alpha=[\alpha]+\beta=k+\beta$，$0<\beta<1$，我们定义*

$$C^\alpha(\mathbf{R}^n)=\{u\in C^k(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{D}^\lambda u\in C^\beta(\mathbf{R}^n),\ |\lambda|=k\}.\tag{2.1.24}$$

若在其中赋以范数

$$|u|_\alpha=\sum_{|\lambda|\leqslant k}\sup|\mathrm{D}^\lambda u|+\sum_{|\lambda|=k}\frac{\sup\limits_{x\neq y}|\mathrm{D}^\lambda u(x)-\mathrm{D}^\lambda u(y)|}{|x-y|^\beta},\tag{2.1.25}$$

易证 C^α 成一 Banach 空间.

但要注意若 $\alpha\in\mathbf{N}$，则 C^α 并非通常的 α 阶连续可微函数空间，而需要定义一种所谓 Zygmund 空间 C_*^α，其定义见后文.

文献中记号常有混淆. 不少文献中 Zygmund 空间也记作 C^k，而连续可微函数空间记作 C^{k-0}，在本书中则随时加以说明. 下面我们用 L-P 分解刻画 C^α 空间，为此，首先证明一个不等式.

引理 2.1.6（**Bernstein 不等式**） *若 $a\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$且 $\mathrm{supp}\,\hat{a}\subset B(0,R)$，则 $a\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，而且对一切 $\alpha\in\mathbf{N}^n$，必存在常数 $C(n,\alpha)>0$ 使*

$$\|\mathrm{D}^\alpha a\|_\infty=\sup_{\mathbf{R}^n}|\mathrm{D}^\alpha a(x)|\leqslant C(n,\alpha)R^{|\alpha|}\|a\|_\infty.\tag{2.1.26}$$

证 取 $\varphi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得 $\mathrm{supp}\,\varphi\subset B(0,2)$ 而且当$|\xi|\leqslant 1$ 时 $\varphi(\xi)\equiv 1$. 记 $\varphi(\xi)$与 $\varphi_R(\xi)=\varphi(\xi/R)$之逆 Fourier 变换为$\Phi(x)$与 $\Phi_R(x)$，即 $\varphi=\hat{\Phi}$，$\varphi_R=\hat{\Phi}_R$. 于是 $\Phi_R(x)=R^n\Phi(Rx)$. 因为 $\hat{a}(\xi)\in\mathscr{S}'$ 且 $\hat{a}(\xi)=\varphi_R(\xi)\hat{a}(\xi)$，所以

$$a(x)=(\Phi_R*a)(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n),\tag{2.1.27}$$

而且 $D^\alpha a(x)=(D_x^\alpha\Phi_R * a)(x)$. 但 $D_x^\alpha\Phi_R(x)=R^{n+|\alpha|}(D^\alpha\Phi)(Rx)$, 因此

$$\| D^\alpha\Phi_R \|_{L^1} = R^{|\alpha|} \| D^\alpha\Phi \|_{L^1}.$$

由(2.1.27)即有

$$\| D^\alpha a(x) \|_{L^\infty} \leqslant \| D^\alpha\Phi_R \|_{L^1} \| a \|_{L^\infty} \leqslant C(n,\alpha)R^{|\alpha|} \| a \|_{L^\infty}.$$

注 可以证明最佳的 $C(n,\alpha)=1$, 故一般仅有 $C(n,\alpha)\geqslant 1$.

对于 C^α 空间可以证明与定理 2.1.4 相应的定理:

定理 2.1.7 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, 则以下条件等价:

1) $u\in C^\alpha$;

2) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛, $u_p\in C^\infty$ 且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset C_p$, $\| u_p \|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha}$;

3) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛, $u_p\in C^\infty$ 且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset B(0,K_1 2^p)$, $\| u_p \|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha}$;

4) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛, $u_p\in C^{l+1}$ 且对一切 $\lambda\in\mathbf{N}^n$, $|\lambda|\leqslant l+1$, 有 $\| D^\lambda u_p \|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{-p\alpha+p|\lambda|}$.

证 1)⇒2). 取 $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 为 u 的 L-P 分解, 则当然有

$$u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n),\quad u_p=\varphi(2^{-p}D)u\in C^\infty,\quad u_{-1}=\psi(D)u\in C^\infty,$$

且 $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 中收敛, $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset C_p$. 令 $\hat{\Phi}=\varphi$, 则对 $\varphi_p(\xi)=\varphi(2^{-p}\xi)$, 其逆 Fourier 变换 Φ_p 应适合

$$\Phi_p(x) = 2^{np}\Phi(2^p x).$$

现在来估计 $\| u_p \|_{L^\infty}$. 先看 $\| u_{-1} \|_{L^\infty}$, 因为

$$\hat{u}_{-1}(\xi) = \varphi_{-1}(\xi)\hat{u}(\xi),\quad u_{-1} = \Phi_{-1} * u,$$

这里 $\hat{\Phi}_{-1}=\varphi_{-1}$, $\varphi_{-1}=\psi\in C_0^\infty$, 所以

$$\Phi_{-1}(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\psi(\xi)d\xi \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

于是, 对 $u_{-1}=\Phi_{-1} * u$ 应用 Hausdorff-Young 不等式即有

$$\| u_{-1} \|_{L^\infty} \leqslant C\| u \|_{L^\infty}.$$

估计 $\| u_p \|_{L^\infty}$, $p>-1$ 时, 需要注意 Hölder 空间与 Zygmund 空间之区别. 对于 Hölder 空间, 令

$$\alpha = [\alpha]+\beta = k+\beta,\quad 0<\beta<1,$$

于是在

$$u_p(x)=\int\Phi_p(y)u(x-y)dy = 2^{np}\int\Phi(2^p y)u(x-y)dy$$
$$=\int\Phi(y)u(x-2^{-p}y)dy \tag{2.1.28}$$

中对 $u(x-2^{-p}y)$ 应用 Taylor 公式,

$$u(x-2^{-p}y) = \sum_{|\lambda|<k}\frac{1}{\lambda!}\partial_x^\lambda u(x)(-2^{-p}y)^\lambda + \sum_{|\lambda|=k}\frac{1}{\lambda!}\partial_x^\lambda u(x-2^{-p}\theta y)(-2^{-p}y)^\lambda,$$

注意, Φ 之各阶矩均为 0, 这是由于

$$\int y^\lambda\Phi(y)dy = (-D_\xi)^\lambda\int e^{-i\xi y}\Phi(y)\,|_{\xi=0}dy = (-D_\xi)^\lambda\varphi(\xi)\,|_{\xi=0} = 0,$$

有

$$u_p(x) = \sum_{|\lambda|=k}\frac{1}{\lambda!}\int\Phi(y)\partial_x^\lambda u(x-\theta y/2^p)(-y/2^p)^\lambda dy$$
$$= \sum_{|\lambda|=k}\frac{1}{\lambda!}\int\Phi(y)(\partial_x^\lambda u(x-\theta y/2^p)-\partial_x^\lambda u(x))(-y/2^p)^\lambda dy.$$

所以

$$\| u_p \|_{L^\infty} \leqslant C2^{-p(k+\beta)}\sup_{|\lambda|=k}|\partial^\lambda u| \leqslant C2^{-p\alpha}|u|_\alpha. \tag{2.1.29}$$

2)⇒3)是自明的.

3)⇒4). 可以应用 Bernstein 不等式(引理 2.1.6)证出. 实际上, 由 3), $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$, $u_p\in C^\infty\subset C^{l+1}$, 而且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset B(0,K_1 2^p)$, 故有

$$\| D^\lambda u_p \|_{L^\infty} \leqslant C2^{p|\lambda|}\| u_p \|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha 2^{-p\alpha+p|\lambda|}.$$

4)⇒1). 因为 $u=\sum u_p$, 且 $\| D^\lambda u_p \|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{-p\alpha+p|\lambda|}$, $\alpha=l+\beta$, $0<\beta<1$, 所以这个级数容许逐项微分到 l 阶, 而 u 为 l 阶连续可微. 不妨设 $|x-y|<1$, 于是由 C^α 之定义, 当 $|\lambda|=l=[\alpha]$ 时

$$|\partial^\lambda u_p(x)-\partial^\lambda u_p(y)|\leqslant C|x-y|2^{p(1-\beta)}.$$

今取 p_0 使之适合 $2^{p_0}\leqslant 1/|x-y|\leqslant 2^{p_0+1}$，则由

$$\begin{aligned}&\partial^\lambda u(x)-\partial^\lambda u(y)\\&\quad=\sum_{p\leqslant p_0}(\partial^\lambda u_p(x)-\partial^\lambda u_p(y))+\sum_{p>p_0}(\partial^\lambda u_p(x)-\partial^\lambda u_p(y))\\&\quad=I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant M|x-y|\sum_{p\leqslant p_0}2^{p(1-\beta)}\\&\leqslant M|x-y|2\cdot 2^{p_0(1-\beta)}\leqslant 2M|x-y|^\beta,\\I_2&\leqslant\sum_{p>p_0}|\partial^\lambda u_p(x)|+\sum_{p>p_0}|\partial^\lambda u_p(y)|\\&\leqslant 2M\sum_{p>p_0}2^{-p\beta}\leqslant 4M2^{-p_0\beta}\\&\leqslant 8M|x-y|^\beta.\end{aligned}$$

总之，当 $\alpha=l+\beta$, $0<\beta<1$ 时，取 $\lambda=l=[\alpha]$，即知$\partial^\lambda u$ 适合指数为β 的 Hölder 条件，即 $u\in C^\alpha$. 至此定理证毕.

注 1 在 1)⇒2)的证明中，我们还看到若 $u\in C^\alpha$，α 不是整数，则有

$$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha}|u|_\alpha.$$

实际上，对 $u\in C^\alpha$，我们可以给 C^α 一个与(2.1.25)等价的范数

$$|u|_\alpha=\sup_p\{2^{p\alpha}\|u_p\|_{L^\infty}\}. \tag{2.1.30}$$

对下面讲的 Zygmund 空间 C^1_*，上式也是对的.

注 2 若 $u\in L^\infty$，则因 $L^\infty\subset\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，故仍有 L-P 分解：$u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$，用证明 1)⇒2)的方法，同样可以证明

$$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C\|u\|_{L^\infty}. \tag{2.1.31}$$

注 3 在有的文献中 Hölder 空间也称为 Lipschitz 空间. 这就加深了一个印象，即以为 $\alpha=1$ 时的 Hölder 空间即适合 Lipschitz 条件

$$|u(x+y)-u(x)|\leqslant C|y|$$

的函数之空间. 实际上并不如此. Zygmund 指出，当 $\alpha=1$ 时，

Hölder 空间的自然的推广应是适合条件

$$|u(x+y)-2u(x)+u(x-y)|\leqslant C|y|$$

的函数空间 C^1_*. 因为有反例证明，确有函数适合上式而不适合 Lipschitz条件. 例如 $u(x)=\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}e^{i4\pi kx}\in C^1_*$，但不适合具有任意常数 M 的 Lipschitz 条件. 所以

$$\{具一阶连续微商的函数空间\}\subset\{适合 Lipschitz 条件的函数空间\}\subset C^1_*.$$

对于 C^1_*，相应于定理 2.1.7 有

定理 2.1.8 对于 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，下列条件均互相等价：

1) $u\in C^1_*$；

2) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛，$u_p\in C^\infty$ 且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset C_p$，
$$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p};$$

3) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛，$u_p\in C^\infty$ 且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset B(0,K_12^p)$，
$$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p};$$

4) $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛，$u_p\in C^{l+1}(\mathbf{R}^n)$ 且
$$\|D^\lambda u_p\|_{L^\infty}\leqslant C_\lambda 2^{-p+p|\lambda|},\quad |\lambda|\leqslant l+1.$$

证 除 1)⇒2)和 4)⇒1)以外，均与定理 2.1.7 之证明相同. 所以我们只来证明 1)⇒2)与 4)⇒1).

1)⇒2). 仍作 L-P 分解 $u=\sum_{p=-1}^\infty u_p$，则它在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中收敛，$u_p\in C^\infty$以及 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset C_p$ 都是显然的. 为证最后的估计，我们取 L-P 分解中的函数 $\varphi(\xi)$与 $\psi(\xi)$均为$|\xi|$之函数. 从而它们都是 ξ 的偶函数. 于是在(2.1.18)中变 y 为$-y$，有

$$\begin{aligned}u_p(x)&=\int\Phi_p(-y)u\left(x+\frac{y}{2^p}\right)dy\\&=\int\Phi_p(y)u\left(x+\frac{y}{2^p}\right)dy.\end{aligned}$$

又因 $\Phi(y)$之各阶矩均为 0，有

$$0=u(x)\int\Phi_p(y)dy=\int\Phi_p(y)u(x)dy,$$

所以

$$|u_p(x)|=\frac{1}{2}\left|\int\Phi_p(y)\Big(u(x+\frac{y}{2^p})-2u(x)+u(x-\frac{y}{2^p})\Big)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}2^{-p}\sup\left|\Big|\frac{y}{2^p}\Big|^{-1}\Big(u(x+\frac{y}{2^p})-2u(x)+u(x-\frac{y}{2^p})\Big)\right|$$

$$\cdot\int|t||\Phi_p(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$=C2^{-p}.$$

这就是 2).

4)⇒1). 由于 $u=\sum u_p$，而

$$u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)$$

$$=\int_0^{|y|}\mathrm{d}s\int_{-s}^{s}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}u_p(x+\tau)\mathrm{d}\tau,$$

但由假设 4)，由上式，

$$|u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)|$$

$$\leqslant\left\|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}u_p(x+\tau)\right\|_{L^\infty}\int_0^{|y|}\mathrm{d}s\int_{-s}^{s}\mathrm{d}\tau$$

$$=|y|^2\sum_{|\lambda|=2}\|D^\lambda u_p\|_{L^\infty}$$

$$\leqslant C2^p|y|^2.$$

现在考虑级数 $\sum u_p$. 我们不妨设 $0<|y|<1$，而对于 $2^{N_0}\leqslant|y|^{-1}<2^{N_0+1}$将上之级数分为两项

$$\sum_{p\leqslant N_0}u_p+\sum_{p>N_0}u_p.$$

对第一项有

$$\sum_{p\leqslant N_0}|u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)|$$

$$\leqslant C\sum_{p\leqslant N_0}|y|^2\cdot 2^p\leqslant M_1|y|^2 2^{N_0}$$

$$\leqslant M_1|y|.$$

这里 M_1 与 N_0 无关. 对于第二项则有

$$\sum_{p>N_0}|u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)|$$

$$\leqslant 4\sum_{p>N_0}\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant 4C\sum_{p>N_0}2^{-p}$$

$$\leqslant M_2 2^{-N_0}<2M_2|y|.$$

这里我们利用了 4)中关于 $\|D^\lambda u_p\|_{L^\infty}$ 之估计，并取其中的 $\lambda=0$.

合并这两项，即有

$$|u(x+y)-2u(x)+u(x-y)|$$

$$\leqslant\sum_{p\leqslant N_0}|u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)|$$

$$+\sum_{p>N_0}|u_p(x+y)-2u_p(x)+u_p(x-y)|$$

$$\leqslant(M_1+2M_2)|y|$$

$$=C|y|,$$

但这就是 1).

至此，我们已对 C^α(包括 C^1_*)证明了 L-P 分解的特性. 但如果 $\alpha<0$ 或 α 为 1 以外的自然数又如何? Zygmund 只定义了 C^1_* 而没有定义 C^k_* ($k>1$ 为自然数). 由于上面的两个定理证明了 C^α 与条件 2)等价($\alpha>0$ 且不为 1 以外的自然数). 我们即可用这种等价性作为定义一般的 C^α(α 为实数)的基础. 这样我们给出

定义 2.1.9 *若 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，而且有一种分解 $u=\sum_{p=-1}^{\infty}u_p$ 在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 中收敛，而且 $\operatorname{supp}\hat{u}_p\subset C_p$，$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha}$，$\alpha$ 是任意实数，则称 $u\in C^\alpha$.*

这个定义可适用于 α 为负数或整数的情况. 它是定义 2.1.5 的自然的推广，因为它保留了一个 C^k 光滑函数在微分 j 次后仍在 C^{k-j} 中这个基本的性质. 确切地说我们有

定理 2.1.10 *设 $P(D)$是 $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta})$类的恰当支 PsDO，则若 $u\in C^\alpha$，必有 $P(D)u\in C^{\alpha-m}$.*

证 我们不妨限于 $P(D)$为经典 PsDO 的情况. 这时 $P(D)$之象征 $P(\xi)$有渐近展开式 $P(\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}P_{m-j}(\xi)$，而 $P_{m-j}(\xi)$当$|\xi|\geqslant A$

(某一指定的正常数)时是 ξ 的 $m-j$ 阶正齐次函数. 然后我们不妨只考虑 $P=P_m$ 的情况, 因为若在这个情况下已证明了定理, 则对 $P_{m-j}(\mathrm{D})$ 当有 $P_{m-j}(\mathrm{D})u\in C^{\alpha-m+j}\subset C^{\alpha-m}$. 这个步骤只需进行有限多次即可, 这样, 渐近展开式有无穷多项并不会造成困难.

于是我们设 $P=P_m$, 而令 $v_p=P_m(\mathrm{D})u_p$. 则 $v_p\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, 而且 $\hat{v}_p(\xi)=P_m(\xi)\hat{u}_p(\xi)$, 从而 $\operatorname{supp}\hat{v}_p\subset C_p$, 因此, 只需再证

$$\|v_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p(\alpha-m)},$$

则由定义 2.1.9. 即知 $P_m(\mathrm{D})u\in C^{\alpha-m}$ 而定理得证.

为证明这个估计, 作 $\Phi(\xi)\in C_0^\infty(\xi)$ 使在 C_0 上 $\Phi(\xi)=1$, 而 $\operatorname{supp}\Phi(\xi)\subset C_0'$, C_0' 是包含 C_0 在内的稍大的环. 于是 $\Phi(2^{-p}\xi)=1$ 于 C_p 上, 而有

$$\begin{aligned}\hat{v}_p(\xi)&=P_m(\xi)\Phi(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi)\\&=2^{mp}P_m(2^{-p}\xi)\Phi(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi).\end{aligned}$$

令 $\Psi(\xi)=P_m(\xi)\Phi(\xi)$, 则 $\Psi\in C_0^\infty$ 且有紧支集. 所以必有 $h(x)\in\mathscr{S}$ 使 $\hat{h}(\xi)=\Psi(\xi)$. 代入上式有

$$\hat{v}_p(\xi)=2^{mp}\hat{h}(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi),$$

从而

$$v_p(x)=2^{mp}u_p*2^{np}h(2^p\cdot)(x).$$

于是由于 $\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha}$, 即有

$$\|v_p\|_{L^\infty}\leqslant C\|u_p\|_{L^\infty}\int 2^{mp}\,|h(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant C2^{-p(\alpha-m)}.$$

于是由定义 2.1.9 即知 $P_m(\mathrm{D})u\in C^{\alpha-m}$, 而 $P_{m-j}(\mathrm{D})u\in C^{\alpha-m+j}$.

这样的步骤只需进行有限多次: 即 $P(\xi)=P_m(\xi)+\cdots+P_{m-N_0}(\xi)+R(\xi)$ 而 $R(\xi)\in S_{\rho,\delta}^{m-N_0+1}$, 这时

$$R(\mathrm{D})u_p(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}R(\xi)\hat{u}_p(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

而

$$\begin{aligned}\|R(\mathrm{D})u_p(x)\|_{L^\infty}&\leqslant C\|u_p\|_{L^\infty}\int_{C_p}(1+|\xi|)^{m-N_0+1}\mathrm{d}\xi\\&\leqslant C2^{-p(\alpha-m)}\quad(N_0\text{ 充分大}).\end{aligned}$$

定理证毕.

注 1 如果记以 $\langle\xi\rangle^m=\langle 1+|\xi|^2\rangle^{m/2}$ 为象征的 PsDO 为 Λ_m, 则因它是椭圆的, 故有拟基本解(实际上是逆算子) Λ_{-m} 仍是经典的 PsDO. 这时可证明 Λ_m: $C^\alpha\to C^{\alpha-m}$ 是双方连续的同构.

注 2 作为一个简单的推论, 若 $u\in C^\alpha$, 则 $\mathrm{D}_ju\in C^{\alpha-1}$, $j=1,2,\cdots,n$. 因此若 α 是一自然数, 则对一切适合 $|\lambda|=\alpha-1$ 的重指标, $\mathrm{D}^\lambda u\in C_*^1$, 因而有

$$|\mathrm{D}^\lambda u(x+y)-2\mathrm{D}^\lambda u(x)+\mathrm{D}^\lambda u(x-y)|\leqslant C|y|.$$

这就给了 C_*^α 一个具体的刻画.

利用这个定理可以给 Sobolev 嵌入定理以新的证明, 而且结论稍微强一些.

定理 2.1.11 对任意 $s\in\mathbf{R}$, $H^s\subset C^{s-n/2}$.

证 由定理 2.1.4 中的 1)⇔2)(这个结论是对一切 $s\in\mathbf{R}$ 均成立的), 作 u 之 L-P 分解 $u=\sum_{p=-1}^{\infty}u_p$. 作 $\Phi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使在 C_0 上 $\Phi(\xi)=1$ 而 $\operatorname{supp}\Phi$ 含于某个稍大的环 C_0' 中, 并令 $\hat{h}=\Phi$ (见定理 2.1.10 之证明), 则

$$\hat{u}_p(\xi)=\Phi(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi).$$

从而

$$\begin{aligned}u_p(x)&=2^{np}(h(2^p\cdot)*u_p)(x)\\&=2^{np}\int u_p(y)h(2^p(x-y))\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故由 Schwartz 不等式,

$$\begin{aligned}\|u_p\|_{L^\infty}&\leqslant\|u_p\|_0\|2^{np}h(2^px)\|_0\\&=\|u_p\|_0\left(\int|2^{np}h(2^px)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\&=2^{np/2}\|u_p\|_0\|h\|_0.\end{aligned}$$

定理 2.1.10 之证明中已指出 $h\in\mathscr{S}$, 而 $u\in H^s$, 由定理 2.1.4 之 2), $\|u_p\|_0\leqslant c_p2^{-ps}$, 故

$$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C^{-p(s-\frac{n}{2})}\cdot c_p\|h\|_0,\quad\{c_p\}\in l^2.$$

但由$\{c_p\}\in l^2$知$\sup\limits_p(c_p\|h\|_0)\leqslant C$，故有$\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p(s-n/2)}$. 由定义 2.1.9 知$u\in C^{s-n/2}$.

下面进一步把 L-P 分解用于微局部的考虑. 函数对底空间$\mathbf{R}^n_x$的局部化，例如H^s_{loc}之作法都是标准的. $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中的$u$在$x_0$附近属于$H^s$(记作$u\in H^s_{x_0}$)即指有$x_0$的邻域$V_{x_0}$使得对一切$\varphi\in C_0^\infty(V_{x_0})$均有$\varphi u\in H^s$. 同样$u\in C^\alpha_{x_0}$也是指用上述$\varphi(x)$去乘$u$后有$\varphi u\in C^\alpha$. 但我们还需将$H^s, C^\alpha$等在余切丛$T^*\mathbf{R}^n\backslash 0=\mathbf{R}^n_x\times(\mathbf{R}^n_\xi\backslash 0)$上局部化，也就是微局部化. 这时我们有

定义 2.1.12 *设$(x_0,\xi_0)\in T^*\mathbf{R}^n\backslash 0$. 称$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中的$u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$或$u\in C^\alpha_{(x_0,\xi_0)}$是指存在$x_0$的邻域$V_{x_0}$与$\xi_0$的锥邻域$\Gamma$，使对一切$\varphi(x)\in C_0^\infty(V_{x_0})$以及$\psi(\xi)\in C^\infty(\Gamma)$，当$\xi$充分大时对$\xi$为零阶正齐次函数，且 consupp $\psi\subset\Gamma$均有*

$$\psi(D)(\varphi u)\in H^s(\text{或 } C^\alpha). \tag{2.1.32}$$

$H^s_{(x_0,\xi_0)}$和$C^\alpha_{(x_0,\xi_0)}$可称为微局部 Sobolev 空间和微局部 Hölder (Zygmund)空间. 对于它们有

定理 2.1.13 *$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中的$u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$或$C^\alpha_{(x_0,\xi_0)}$的充分必要条件是存在$x_0$的邻域$V_{x_0}$，使在其中有分解式*

$$u=u_1+u_2, \tag{2.1.33}$$

其中$u_1\in H^s$(或C^α)，而$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u_2)$.

证 1) 必要性. 由$u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$和$C^\alpha_{(x_0,\xi_0)}$之定义，可以找到x_0的邻域$\tilde V_{x_0}\subset V_{x_0}$，和$\xi_0$的锥邻域$\tilde\Gamma\subset\Gamma$以及相应的$\varphi(x)$和$\psi(\xi)$使$\varphi|_{\tilde V_{x_0}}=1$，$\psi|_{\tilde\Gamma}=1$(当$|\xi|$充分大时)，而且$\psi(D)(\varphi u)\in H^s(\mathbf{R}^n)$或$C^\alpha(\mathbf{R}^n)$. 但

$$\begin{aligned}u&=\varphi u+(1-\varphi)u\\&=[\psi(D)+(I-\psi(D))](\varphi u)+(1-\varphi)u\\&=\psi(D)(\varphi u)+[(I-\psi(D))(\varphi u)+(1-\varphi)u]\\&=u_1+u_2,\end{aligned}$$

这里$u_1=\psi(D)(\varphi u)\in H^s(\mathbf{R}^n)$(或$C^\alpha(\mathbf{R}^n)$). 又显然

$$(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(u_2).$$

2) 充分性. 若(2.1.32)成立，且u_1,u_2具有所述性质，取V_{x_0}与Γ使得

$$(V_{x_0}\times\Gamma)\cap \mathrm{WF}(u_2)=\varnothing,$$

则任选定义 2.1.12 中所要求的$\varphi(x)$与$\psi(\xi)$都有

$$\psi(D)(\varphi u)=\psi(D)(\varphi u_1)+\psi(D)(\varphi u_2).$$

但第一项属于$H^s(\mathbf{R}^n)$或$C^\alpha(\mathbf{R}^n)$，而第二项属于$C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap H^s(\mathbf{R}^n)$或$C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 故定理证毕.

现在我们用 L-P 分解来刻画$u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$和$C^\alpha_{(x_0,\xi_0)}$. 这里有两个定理.

定理 2.1.14 *设$\alpha,\alpha'\in\mathbf{R}$且$\alpha'>\alpha$，则下面两个命题等价：*

1) $u\in C^\alpha_{x_0}\cap C^{\alpha'}_{(x_0,\xi_0)}$；

2) 存在$\varphi\in C_0^\infty$使得在x_0的某个邻域V_{x_0}中有$\varphi(x)=1$，而在ξ_0的某个锥邻域Γ中则有

$$\varphi u=v_{-1}+\sum_{p=0}^\infty(v_p'+v_p''),$$

其中$v_{-1}\in C^\infty$；

$$\|v_p'\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha},\quad \mathrm{supp}\,\hat v_p'\subset C_p\cap C\Gamma;$$
$$\|v_p''\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha'},\quad \mathrm{supp}\,\hat v_p''\subset C_p.$$

证 1)⇒2). 取φ和ψ如定义 2.1.12 所要求而且在ξ_0的一个较小的锥邻域$\Gamma_1\subset\subset\Gamma$上，$\psi(\xi)\equiv 1$ ($|\xi|$充分大). 由于$u\in C^\alpha_{x_0}\cap C^{\alpha'}_{(x_0,\xi_0)}$即有$\psi(D)(\varphi u)\in C^{\alpha'}$，$(I-\psi(D))(\varphi u)\in C^\alpha$. 对这两个函数分别作 L-P 分解：

$$\psi(D)(\varphi u)=v_{-1}''+\sum_{p=0}^\infty v_p'', \tag{2.1.34}$$

我们有 $\mathrm{supp}\,\hat v_{-1}''\subset B(0,1)$，$\mathrm{supp}\,\hat v_p''\subset C_p$ $(p>-1)$，而且$v_{-1}''\in C^\infty$，$\|v_p''\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\alpha'}$.

$$(I-\psi(D))(\varphi u)=v_{-1}'+\sum_{p=-1}^\infty v_p', \tag{2.1.35}$$

而且 $\mathrm{supp}\,\hat v_{-1}'\subset B(0,1)$，$\mathrm{supp}\,\hat v_p'\subset C_p(p>-1)$，而且$v_{-1}'\in C^\infty$，

$\| v_p' \|_{L^\infty} \leqslant C2^{-p\alpha}$. 由于 $\hat{v}_p' = \varphi(2^{-p}\xi)(1-\psi(\xi))\hat{u}(\xi)$,

$$\operatorname{supp} \varphi(2^{-p}\xi) \subset C_p, \quad \operatorname{supp}(1-\psi(\xi)) \subset C\Gamma,$$

所以 $\operatorname{supp} \hat{v}_p' \subset C_p \cap C\Gamma$.

合并(2.1.34)与(2.1.35)，并记 $v_{-1} = v_{-1}' + v_{-1}''$ 即得 2).

2)⇒1). 因为 $\alpha' > \alpha$，若记 $u_p = v_p' + v_p''$，$u_{-1} = v_{-1}'$，则 $\| u_p \|_{L^\infty} \leqslant C2^{-p\alpha}$，而且 $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset C_p$，由此导出 $\varphi u \in C^\alpha$，即 $u \in C^\alpha_{x_0}$. 另一方面，可将 φu 写为

$$\varphi u = \left(v_{-1}' + \sum_{p=0}^{\infty} v_p''\right) + \sum_{p=0}^{\infty} v_p' = u_1 + u_2,$$

则 $u_1 \in C^{\alpha'}$，而由于 $\Gamma \cap \mathrm{WF}(u_2) = \varnothing$，故由定理 2.1.13，$u \in C^{\alpha'}_{(x_0,\xi_0)}$. 定理证毕.

注 若将定理中的条件 $\alpha' > \alpha$ 改为 $\alpha \geqslant \alpha'$，则自然有 $u \in C^{\alpha'}_{x_0}$，而不一定能在 ξ_0 的锥邻域中升高光滑性.

关于 Sobolev 空间有完全类似的结果：

定理 2.1.15 *设 $s' > s$，则下述两个命题等价：*

1) $u \in H^s_{x_0} \cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$；

2) *存在 $\varphi \in C_0^\infty$ 使在 x_0 的某个邻域 V_{x_0} 中 $\varphi(x) = 1$，而在 ξ_0 的某个锥邻域 Γ 中有分解式*

$$\varphi u = v_{-1} + \sum_{p=0}^{\infty} (v_p' + v_p''),$$

其中 $v_{-1} \in C^\infty$；

$$\| v_p' \|_0 \leqslant c_p' 2^{-ps}, \quad \{c_p'\} \in l^2, \ \operatorname{supp} \hat{v}_p' \subset C_p \cap C\Gamma;$$

$$\| v_p'' \|_0 \leqslant c_p'' 2^{-ps'}, \quad \{c_p''\} \in l^2, \ \operatorname{supp} \hat{v}_p'' \subset C_p.$$

这个定理的证明与定理 2.1.14 完全一样，所以略去. 同样，$s \geqslant s'$ 的情况是不足道的.

2.2 函数空间的代数运算

本书一个重要主题是将微局部分析用于非线性问题，因而应该考虑一些非线性运算，其中最重要的是乘法以及函数的复合. 先讨论乘法，并且先考查一下广义函数的乘法困难何在. 对相当光滑的函数，逐点的乘法是很自然的. 但是这个概念不能用于广义函数，因为广义函数在一点之"值"是没有意义的. 原因在于广义函数容许相当广泛的奇异性. 因为波前集的概念对奇性作了更细致的分析，它对研究乘法的困难是大有帮助的.

为简单计，考虑两个 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 广义函数 u_1, u_2. 如果 u_1, u_2 性质比较好则可以用卷积来定义乘积，即

$$(u_1 \cdot u_2)\hat{}\,(\xi) = (\hat{u}_1 * \hat{u}_2)(\xi) = \int \hat{u}_1(\xi - \eta)\hat{u}_2(\eta)\mathrm{d}\eta. \quad (2.2.1)$$

但若 u_1, u_2 不充分光滑，则尽管 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 广义函数之 Fourier 变换是有意义的($\hat{u}_j(\xi)$ 其实是 C^∞ 函数)，上之积分不一定收敛. 为了使它收敛，不妨假设当 $|\eta| \to +\infty$ 时，$\hat{u}_1(\xi - \eta)$ 或 $\hat{u}_2(\eta)$ 中至少有一个是急减的(另一个作为 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 广义函数之 Fourier 变换应是缓增的——Paley-Wiener-Schwartz 定理). 因此，若 $\hat{u}_2(\eta)$ 在某个锥 Γ_2 外急减(即 $\mathrm{WF}(u_2)$ 之"频率"分量 η 恒在 Γ_2 内)，而 $\hat{u}_1(\eta)$ 在某个锥 Γ_1 外急减，且 $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset \mathbf{R}^n \backslash 0$，即不存在这样的 η 使 $(x, \eta) \in \mathrm{WF}(u_2)$，而 $(x, -\eta) \in \mathrm{WF}(u_1)$，则对任一个 η，(2.2.1)之被积函数的两个因子至少有一个是急减的，另一个是缓增的. 因而(2.2.1)是收敛的，而可以用它来定义 $u_1 \cdot u_2$. 即我们有以下的结果：若 $u_1, u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 且其波前集适合条件

$$\mathrm{WF}(u_1) + \mathrm{WF}(u_2) \subset \mathbf{R}^n_x \times (\mathbf{R}^n_\eta \backslash 0), \quad (2.2.2)$$

(式左的加法是对底空间的同一点按"纤维"η 相加)，则可以定义 $u_1 \cdot u_2$. 这方面的详细讨论可参看 Hörmander [Hö2] 和齐民友 [Qi].

H^s 函数和 C^α 函数是更具体的广义函数，因而应用调和分析方法(微局部分析就是一种比较细致的调和分析)可以得到更精确的结果. 例如我们有

定理 2.2.1 *若 $u_j \in H^{s_j}$，$j = 1, 2$，而 $s_1 + s_2 \geqslant 0$，则 $u_1 \cdot u_2 \in H^s$，这里*

$$s \leqslant s_j, \ j = 1, 2 \quad 且 \quad s \leqslant s_1 + s_2 - \frac{n}{2}, \quad (2.2.3)$$

若 s_j 中至少有一个是 $n/2$，或 $s=-n/2$，则(2.2.3)之后一不等式要改为严格不等式.

证 若 $s_1+s_2\geqslant 0$，先证明可以定义 $u_1\cdot u_2$ 为 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$之元. 事实上，任取 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$均有 $u_2\varphi\in H^{-s_1}$，而按对偶性$\langle u_1,u_2\varphi\rangle$是有意义的，且因 $s_1+s_2\geqslant 0,-s_1\leqslant s_2$，从而

$$|\langle u_1,u_2\varphi\rangle|\leqslant\|u_1\|_{s_1}\|u_2\varphi\|_{-s_1}\leqslant\|u_1\|_{s_1}\|u_2\varphi\|_{s_2}$$
$$\leqslant C(\varphi)\|u\|_{s_1}\|u_2\|_{s_1}.$$

这里 $C(\varphi)$随 $\varphi\to 0$ (于 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$中)而趋于 0. 因此我们可以用上式来定义 $u_1\cdot u_2\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$：

$$\langle u_1\cdot u_2,\varphi\rangle=\langle u_1,u_2\varphi\rangle.$$

这个定义当然与 u_1,u_2 之次序无关. 为证明上之定理，我们需要一个引理：

引理 2.2.2 *若 $F(\xi,\eta)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 中的分块连续函数，令*

$$T_F(f,g)(\xi)=\int F(\xi,\eta)f(\eta)g(\xi-\eta)\mathrm{d}\eta,$$

$f,g\in C_0$. 若

$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\leqslant M^2,\quad\text{对一切 }\xi\text{ 成立，或}$$
$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant M^2,\quad\text{对一切 }\eta\text{ 成立，}\tag{2.2.4}$$

则

$$\|T_F(f,g)\|_{L^2}\leqslant M\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.\tag{2.2.5}$$

证 由(2.2.4)之第一式，利用 Schwartz 不等式，

$$|T_F(f,g)(\xi)|^2\leqslant M^2\int|f(\eta)g(\xi-\eta)|^2\mathrm{d}\eta,$$

于是立即可得结论. 若(2.2.4)之第二式成立，记 $w(\xi)=T_F(f,g)(\xi)$，则对任意 $h(\xi)\in C_0$，

$$\left|\int w(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi\right|=\left|\int f(\eta)\mathrm{d}\eta\int F(\xi,\eta)g(\xi-\eta)h(\xi)\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\leqslant M\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2},$$

这里我们对内层积分应用了前面的结论. 因此 $w(\xi)$作为 L^2 空间泛

函(仍是 L^2 函数)其 L^2 范数适合(2.2.5).

定理 2.2.1 之证明 令

$$\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},\quad f_j(\xi)=\langle\xi\rangle^{s_j}\hat{u}_j(\xi),$$

我们有

$$\langle\xi\rangle^s(u_1u_2)^\wedge(\xi)=(2\pi)^{-n}\int F(\xi,\eta)f_1(\xi-\eta)f_2(\eta)\mathrm{d}\eta,$$
$$F(\xi,\eta)=\langle\xi\rangle^s\langle\xi-\eta\rangle^{-s_1}\langle\eta\rangle^{-s_2}.$$

现在来估计 $\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta$或$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi$. 我们把 F 分成几个函数之和. 其一是在$\langle\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle/2$ 处 F 不变而在其外为 0，第二个是在$\langle\xi-\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle/2$ 处不变而在其外为 0. 然后看余下的部分，即在$\langle\xi\rangle/2<\langle\eta\rangle$同时$\langle\xi\rangle/2<\langle\xi-\eta\rangle$处. 对前两部分我们估计 $\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta$，对其余部分估计 $\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi$.

先看第一部分，若 $s_1\geqslant 0$，则因$\langle\xi-\eta\rangle\geqslant\langle\xi/2\rangle$，故

$$\langle\xi-\eta\rangle^{-s_1}\leqslant C\langle\xi\rangle^{-s_1}.$$

若 $s_1<0$，则因$\langle\xi-\eta\rangle^{-s_1}\leqslant[C(\langle\xi\rangle+\langle\xi\rangle/2)]^{-s_1}\leqslant C\langle\xi\rangle^{-s_1}$. 故

$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\leqslant C\langle\xi\rangle^{2(s-s_1)}\int_{\langle\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle/2}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\mathrm{d}\eta.$$

若 $s_2<n/2$，则

$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\leqslant C\langle\xi\rangle^{2(s-s_1)+n-2s_2}\leqslant C,$$

因为由假设 $s<s_1+s_2-n/2$，故 $2(s-s_1)+n-2s_2\leqslant 0$. 若 $s_2>n/2$，则因 $s\leqslant s_1$，

$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\mathrm{d}\eta\leqslant C.$$

若 $s_2=n/2$，则

$$\int_{\langle\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle/2}\langle\eta\rangle^{-2s_2}\mathrm{d}\eta=\int_{\langle\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle/2}\langle\eta\rangle^{-n}\mathrm{d}\eta\leqslant C\ln\langle\xi\rangle.$$

但这时(2.2.3)应改为严格的不等式而有 $s<s_1$，所以

$$\int|F(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\eta\leqslant C\langle\xi\rangle^{s-s_1}\ln\langle\xi\rangle\leqslant C.$$

再看第二部分. 若在 $T_F(f,g)$之定义式中将 η 变为 $\xi-\eta$, 即知只需证明

$$\int |F(\xi,\xi-\eta)|^2 d\eta \leqslant M^2$$

即可. 这就化成了第一部分.

余下的是要估计

$$I=\int_W |F(\xi,\eta)|^2 d\xi = \langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_W \langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s_1} d\xi,$$

$W=\{(\xi,\eta);\langle\xi\rangle<2\langle\eta\rangle$, 同时$\langle\xi\rangle\leqslant 2\langle\xi-\eta\rangle\}$.

现在分别两个情况. 首先看 $s_1>0$. 因为由假设$\langle\xi-\eta\rangle>\langle\xi\rangle/2$, 因此

$$I\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2s_2}\int_{\langle\xi\rangle<2\langle\eta\rangle}\langle\xi\rangle^{2s-2s_1} d\xi.$$

令 $\xi=\langle\eta\rangle\xi_1$, 有

$$\langle\xi\rangle^2 = 1+\langle\eta\rangle^2|\xi_1|^2 \sim \langle\eta\rangle^2(1+|\xi_1|^2)=\langle\eta\rangle^2\langle\xi_1\rangle^2,$$

$$I\leqslant C\langle\eta\rangle^{2s-2(s_1+s_2)+n}\int_{\langle\xi_1\rangle<2}\langle\xi_1\rangle^{2s-2s_1} d\xi_1.$$

因为积分域为$\langle\xi_1\rangle^2<4$ 或$|\xi_1|^2<3$ 是一个球, 因此注意到$\langle\eta\rangle\geqslant 1$ 与 $s-(s_1+s_2)+n/2<0$, 有 $I\leqslant C$.

其次看 $s_1\leqslant 0$. 这时先令$\langle\xi\rangle\leqslant 4$, 于是

$$\langle\xi-\eta\rangle^2 = 1+|\xi-\eta|^2 = 1+|\xi|^2-2\xi\eta+|\eta|^2$$
$$\leqslant 1+2|\xi|^2+2|\eta|^2\leqslant C\langle\eta\rangle^2.$$

代入积分 I, 注意到由假设

$$I\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2s_1-2s_2}\int_{\langle\xi\rangle\leqslant 4}\langle\xi\rangle^{2s}d\xi\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2(s_1+s_2)}\leqslant C.$$

于是余下的只有 $s_1\leqslant 0$ 而$\langle\xi\rangle>4$ 的情况. 这时由积分域的条件$\langle\eta\rangle>2$, $\langle\xi-\eta\rangle>2$, 我们来作变量变换:

$$\xi=|\eta|\xi',\quad \eta=|\eta|\zeta,$$

则由于$\langle\eta\rangle^2=1+|\eta|^2>2^2=4$ 有$|\eta|^2>3$, 因此一方面

$$\langle\eta\rangle^2 = 1+|\eta|^2<(4/3)|\eta|^2,$$

另一方面自然有$|\eta|^2=\langle\eta\rangle^2-1<\langle\eta\rangle^2$, 所以$\langle\eta\rangle\sim|\eta|$. 同样

$$\langle\xi\rangle\sim|\xi|,\quad \langle\xi-\eta\rangle\sim|\xi-\eta|.$$

因此被积函数可以用 $C|\xi'|^{2s}|\xi'-\zeta|^{-2s_1}$ 来估计. 积分域含于

$$4<\langle\xi\rangle<2\langle\eta\rangle,$$

故必适合 $a_1<|\xi|<a_2|\eta|$, 作变换变量后, 含于 $A_1/|\eta|\leqslant|\xi|\leqslant A_2$ 中. 因此积分可以用下式估计:

$$I<C|\eta|^{n+2(s-s_1-s_2)}\int_{A_1/|\eta|\leqslant|\xi'|<A_2}|\xi'|^{2s}|\xi'-1|^{-2s_1}d\xi.$$

这里我们作了一个旋转, 因为$|\zeta|=1$, 故可把它旋转成向量$(1,0,\cdots,0)$ (仍记为 1). 但因 $s_1\leqslant 0$, 故$-2s_1\geqslant 0$ 而

$$|\xi'-1|^{-2s_1}\leqslant(|\xi'|+1)^{-2s_1}\leqslant(A+1)^{-2s_1}=B.$$

所以

$$I<BC|\eta|^{n+2(s-s_1-s_2)}\int_{A_1/|\eta|\leqslant|\xi'|<A_2}|\xi'|^{2s}d\xi'.$$

被积函数可能有一个奇点 $\xi'=0$ 视 $2s$ 之值而定. 若 $s<-n/2$, 有

$$I<C|\eta|^{n+2(s-s_1-s_2)-n-2s}=C|\eta|^{-(s_1+s_2)}<C$$

(注意, 在估计 I 时又要用到$|\eta|>a_1/a_2>0$). 当 $s=-n/2$ 时, 积分与 $\ln|\eta|$ 同阶. 但由定理之假设, 当 $s=-n/2$ 时应有严格不等式 $s<s_1+s_2-n/2$, 从而 $n+2(s-s_1-s_2)<0$ 而

$$I\leqslant C|\eta|^{n+2(s-s_1-s_2)}\ln|\eta|\leqslant C.$$

最后当 $s>-n/2$ 时, 积分

$$\int_{A_1/|\eta|\leqslant|\xi'|<A_2}|\xi'|^{2s}d\xi'\leqslant\int_{|\xi'|<A_2}|\xi'|^{2s}ds'\leqslant C,$$

所以

$$I\leqslant C|\eta|^{n+2(s-s_1-s_2)}\leqslant C\quad(n+2(s-s_1-s_2)\leqslant 0).$$

至此定理证毕.

这个定理的意义在于它说明了 H^s 之元因为有奇异性, 而一般不能相乘, 即使可以相乘, 其乘积之正规性将有所降低($s\leqslant s_j$, $s\leqslant s_1+s_2-n/2$). 我们不妨看一个特例, 即 $s=s_1=s_2$, 而且 $s_j>n/2$. 这时, 定理 2.2.1 中的不等式(2.2.3)满足(第三个不等式成为严格的不等式). 于是我们有:

推论 2.2.3 *若 $s>n/2$, 则 H^s 成一代数.*

对 Hölder 空间与 Zygmund 空间也有相应的结果.

定理 2.2.1 还可以进一步微局部地精确化，L-P 分解恰好是处理这个问题的适当工具. 现在我们想要用 L-P 分解来证明下面的

定理 2.2.4 设$(x_0,\xi_0)\in \mathbf{R}_x^n\times(\mathbf{R}_\xi^n\backslash 0)$，于是有：

1) 令 $u\in C_{x_0}^\alpha\cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha'}$，$v\in C_{x_0}^\beta\cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\beta'}$，$\alpha+\beta>0$，则 $u\cdot v$ 在 x_0 附近有定义，而且 $u\cdot v\in C_{x_0}^\gamma\cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\gamma'}$，

$$\gamma=\min\{\alpha,\beta\},\quad \gamma'=\min\{\alpha',\beta',\alpha+\beta\}. \tag{2.2.6}$$

2) 若 $u\in H_{x_0}^s\cap H_{(x_0,\xi_0)}^{s'}$，$v\in H_{x_0}^t\cap H_{(x_0,\xi_0)}^{t'}$，$s+t>n/2$，则 $u\cdot v$ 在 x_0 附近有定义，而且 $u\cdot v\in H_{x_0}^\tau\cap H_{(x_0,\xi_0)}^{\tau'}$，

$$\tau=\min\left\{s,t,s+t-\frac{n}{2}\right\},\quad \tau'=\min\left\{s',t',s+t-\frac{n}{2}\right\}. \tag{2.2.7}$$

在开始证明之前先要说明一点. 微局部的 Sobolev 空间和 Hölder 空间的定义中都涉及 ξ_0 的一个锥邻域 Γ. 如果 $\Gamma=\mathbf{R}_\xi^n\backslash 0$，则

$$H_{(x_0,\xi_0)}^{s'}=H_{x_0}^{s'};\quad C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha'}=C_{x_0}^{\alpha'},$$

所以这个定理也包括了局部化的结果. 例如若在 2)中令

$$H_{(x_0,\xi_0)}^{s'}=H_{x_0}^s,\quad H_{(x_0,\xi_0)}^{t'}=H_{x_0}^t,$$

则由(2.2.7)立即有 $\tau=\tau'$，而这个结果与定理 2.2.1 一致，只不过这里的条件更强：$s+t>n/2$，而不是定理 2.2.1 的 $s+s'\geqslant 0$.

下面讲一下证明的基本思路. 由于这个定理是局部的，我们不妨设 u,v 都已事先用 $\varphi\in C_0^\infty$ 乘过，这里的 $\varphi\equiv 1$ 于 x_0 附近. 对 u,v 都作前面说过的分解(例如 L-P 分解)：

$$u=\sum_{p=-1}^\infty u_p,\quad v=\sum_{q=-1}^\infty v_q, \tag{2.2.8}$$

则形式地看，应该定义

$$u\cdot v=\sum_{p,q}u_pv_q, \tag{2.2.9}$$

这个级数的收敛性，当然成了严重的问题. 处理这个问题的方法如下：将指标 p,q "相当接近"的项与"相当远离"的项分开. 例如给定一个自然数 N_0，我们定义

$$S_qu=\sum_{p=-1}^{q-N_0}u_p \tag{2.2.10}$$

(如果 $q-N_0<-1$，则规定 $S_qu\equiv 0$). 它是 C^∞ 函数 u_p 的有限和，因此$(S_qu)(x)\in C^\infty$. 同样也可以定义 $S_pv\in C^\infty$. 这样我们把形式级数(2.2.9)之项分为三组：

$$\begin{aligned}\sum_{p,q}u_pv_q&=\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0}u_pv_q+\sum_{-1\leqslant q\leqslant p-N_0}u_pv_q+\sum_{|p-q|<N_0}u_pv_q\\&=\sum_{q\geqslant N_0-1}(S_qu)v_q+\sum_{p\geqslant N_0-1}(S_pv)u_p+\sum_{|p-q|<N_0}u_pv_q\\&=T_uv+T_vu+R(u,v).\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

此式中 T_uv,T_vu 和 $R(u,v)$之定义即由上式决定. T_uv,T_vu 与 $R(u,v)$ 性质是不相同的，而由它们的"谱"的性质决定.

定理 2.1.14 与定理 2.1.15 指出，对我们所需考查的函数都有以下形式的分解：

$$u=u_{-1}+\sum_{p=0}^\infty u_p=u_{-1}+\sum_{p=0}^\infty(u_p'+u_p'').$$

而 $\operatorname{supp}\hat{u}_p'\subset C_p\cap C\Gamma$，$\operatorname{supp}\hat{u}_p''\in C_p$. 考虑乘积 u_pv_q 时正如本节开始所指出，应该讨论它的 Fourier 变换

$$(u_pv_q)\hat{}(\xi)=\int\hat{u}_p(\eta)\hat{v}_q(\xi-\eta)\mathrm{d}\eta=\hat{u}_p*\hat{v}_q.$$

对卷积有以下的熟知结果：

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\hat{u}_p*\hat{v}_q&\subset\operatorname{supp}\hat{u}_p+\operatorname{supp}\hat{v}_q\\&=\{\xi+\eta;\ \xi\in\operatorname{supp}\hat{u}_p,\ \eta\in\operatorname{supp}\hat{v}_q\}.\end{aligned}$$

把它们应用到 u_p',u_p''类型的项上去，因为我们知道

$$\operatorname{supp}\hat{u}_p'\subset C_p\cap C\Gamma,\quad \operatorname{supp}\hat{u}_p''\subset C_p,$$

而 $C_p\cap C\Gamma$ 与 C_p 又均含于球体 $B(0,K2^{p+1})$中. 当 $p<q-N_0$ 而 N_0 又充分大(即 p 与 q "相距甚远")时，$K2^{p+1}<K2^{q-N_0+1}$可以任意小，从而 $B(0,K2^{p+1})$是一个很小的球. 例如 $C_p\cap C\Gamma$ "加"上这样的小球将仍是同样形状的区域. 例如令 $p=0$，则由图 1 可见

$$C_0'=C_0+B(0,4K2^{-N_0})$$

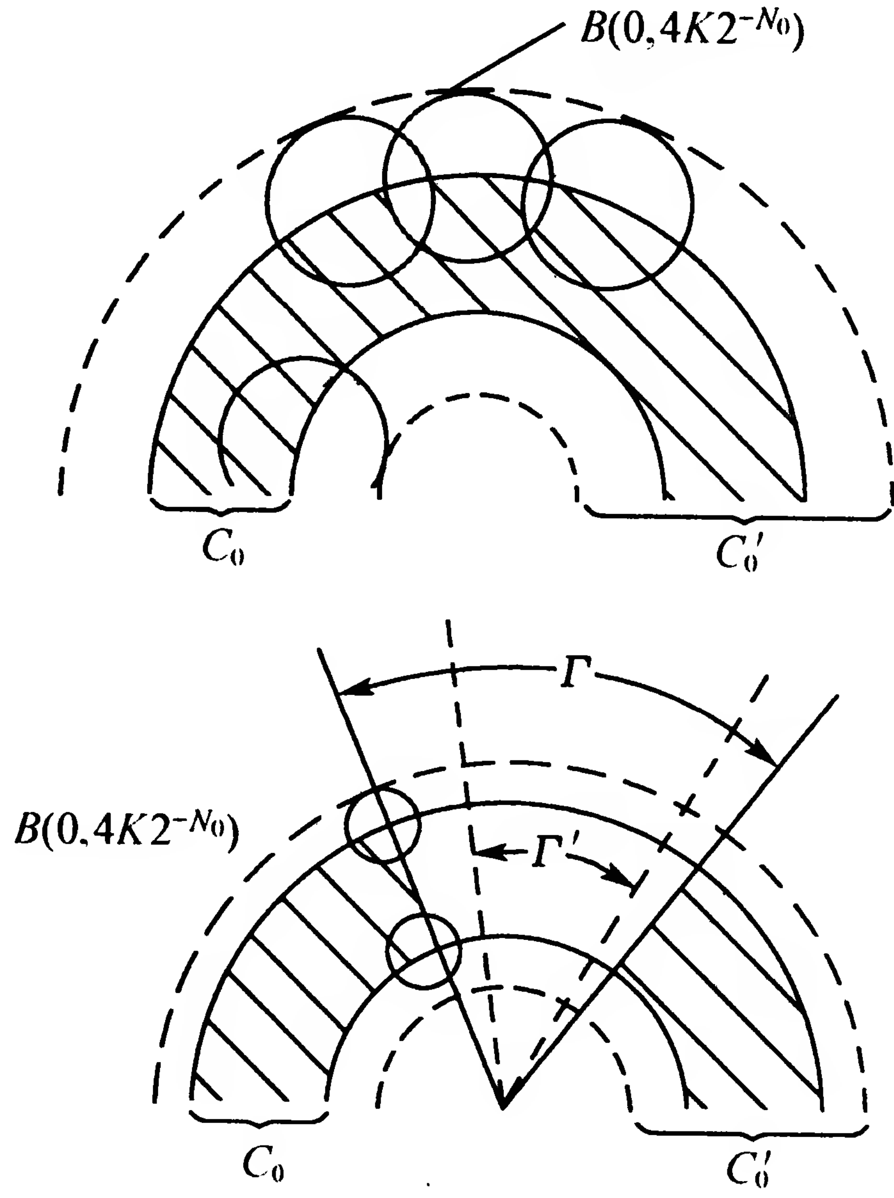


图 1

只是一个比 C_0 稍大的环. 又令 $\Gamma'\subset\Gamma$ 使得

$$(C_0\cap C\Gamma+B(0,4K2^{-N_0}))\cap\Gamma'=\varnothing,$$

则

$$C_0\cap C\Gamma+B(0,4K2^{-N_0})\subset C_0'\cap C\Gamma'.$$

这仍是同样类型的区域.

以上的讨论适用于"相距甚远"的 p,q, 对"相距较近"的 p,q 则利用 C_p,C_q 均含于球体 $B(0,K2^p)$,$B(0,K2^q)$中, 而其"和"仍为球体:

$$B(0,K2^p)+B(0,K2^q)=B(0,K(2^p+2^q)).$$

这一点由图 1 也看得很清楚.

"谱"的构造通过定理 2.1.4,2.1.7,2.1.14,2.1.15 等即可决定乘积的正规性. 我们把这方面的结果归结为三个引理.

引理 2.2.5 *若 $u\in C^\alpha$, $v\in C^\beta$ 而 $\alpha+\beta>0$, 则 $R(u,v)\in C^{\alpha+\beta}$; 若 $u\in H^s$, $v\in H^t$ 而 $s+t>n/2$, 则 $R(u,v)\in H^{s+t-n/2}$.*

证 任取一个整数 $\nu\in(-N_0,N_0)$, 而记

$$R_\nu(u,v)=\sum_q u_{q-\nu}v_q=\sum_q f_q.$$

这个级数的收敛性在下面讨论. $R(u,v)=\sum_{|\nu|<N_0}R_\nu(u,v)$, 但

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\hat{f}_q&\subset\operatorname{supp}\hat{u}_{q-\nu}+\operatorname{supp}\hat{v}_q\\&\subset B(0,K2^{q+|\nu|+1})+B(0,K2^{q+1})\\&\subset B(0,K_12^q),\end{aligned}$$

若 u,v 在 Hölder 空间中, 则有

$$\begin{aligned}\|f_q\|_{L^\infty}&\leqslant\|u_{q-\nu}\|_{L^\infty}\|v_q\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{-\alpha(q-\nu)}2^{-\beta q}\leqslant C2^{-q(\alpha+\beta)};\end{aligned}$$

若 u,v 在 Sobolev 空间中, 则有

$$\|f_q\|_{L^2}\leqslant\|u_{q-\nu}\|_{L^\infty}\|v_q\|_{L^2}.$$

但由 Sobolev 嵌入定理, $H^s\subset C^{s-n/2}$, 而对 $u\in C^{s-n/2}$ 有 $\|u_{q-\nu}\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-q(s-n/2)}$ ($2^{\nu(s-n/2)}$ 并入 C 中). 又由定理2.1.4之 3), $\|v_q\|_{L^2}\leqslant c_q2^{-qt}$, $\{c_q\}\in l^2$. 记 $d_q=Cc_q$,

$$\|f_q\|_{L^2}\leqslant d_q2^{-q(s+t-\frac{n}{2})},\quad \{d_q\}=\{Cc_q\}\in l^2.$$

于是级数 $\sum_q u_{q-\nu}v_q$ 分别在 L^∞ 与 L^2 意义下收敛, 而且由定理 2.1.4 之 3)与定理 2.1.7 之 3)即知 $R(u,v)$属于 $C^{\alpha+\beta}$或 $H^{s+t-n/2}$.

另外两项 T_uv 与 T_vu 的情况则不同. 仍用上面的记号, 这时我们有

引理 2.2.6 *若 $u\in L^\infty$, $v\in C^\beta_{x_0}\cap C^{\beta'}(\Gamma)$, 则*

$$T_uv\in C^\beta_{x_0}\cap C^{\beta'}(\Gamma').$$

$\Gamma'\subset\Gamma$ 是前面讲过的 ξ_0 的锥邻域. 若 $v\in H^s_{x_0}\cap H^{s'}(\Gamma)$, 则

$$T_uv\in H^s_{x_0}\cap H^{s'}(\Gamma').$$

证 $C^{\beta'}(\Gamma)$之定义自明, 不需说明. 现将 v 写为

$$v_{-1}+\sum_q(v_q'+v_q''),$$

于是

$$T_uv=\sum_{q\geqslant N_0-1}(S_qu)(v_q'+v_q'')=\sum_{q\geqslant N_0-1}(f_q'+f_q''),$$

$$S_q u = \sum_{p=-1}^{q-N_0} u_p.$$

现在分别考虑 $\sum f_q'$ 与 $\sum f_q''$. 因为 $S_q u = \sum_{p=-1}^{q-N_0} u_p$，所以

$$\operatorname{supp}(S_q u)\hat{} \subset \bigcup_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} \operatorname{supp} \hat{u}_p \subset B(0, K2^{q-N_0+1}),$$

$$\operatorname{supp} \hat{v}_q' \subset C_q \cap C\Gamma.$$

于是当 N_0 充分大时，

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} \hat{f}_q' &= \operatorname{supp}[(S_q u)\hat{} * \hat{v}_p'] \\ &\subset B(0, K2^{q-N_0+1}) + C_p \cap C\Gamma \\ &\subset C_q' \cap C\Gamma'.\end{aligned}$$

而且

$$\| f_q' \|_{L^\infty} \leqslant \| S_q u \|_{L^\infty} \| v_q' \|_{L^\infty} \leqslant C \| u \|_{L^\infty} \cdot 2^{-q\beta}.$$

再来看 $\sum f_q''$，我们同样可证明 $\operatorname{supp} \hat{f}_q'' \subset C_q'$ 以及

$$\| f_q'' \|_{L^\infty} \leqslant \| S_q u \|_{L^\infty} \| v_q'' \|_{L^\infty} \leqslant C \| u \|_{L^\infty} \cdot 2^{-q\beta'}.$$

由定理 2.1.14 即得 $T_u v$ 属于 $C_{x_0}^{\beta} \cap C^{\beta'}(\Gamma')$.

对 Sobolev 空间的情况证明类似，不过现在需要估计的是 $\| f_q' \|_{L^2}$ 与 $\| f_q'' \|_{L^2}$.

这个引理适用于 $u\in C^\alpha$，$\alpha\geqslant 0$ 的情况. 因为我们已用 φ 乘了 u，所以由 $u\in C^\alpha$ 可以得到 $u\in L^\infty$. 问题是 $u\in C^\alpha$，$\alpha<0$ 时 $T_u v$ 性质如何？这时我们有

引理 2.2.7 *若 $u\in C_{x_0}^\alpha$，$\alpha<0$，$v\in C_{x_0}^\beta \cap C^{\beta'}(\Gamma)$，则 $T_u v\in C_{x_0}^{\alpha+\beta} \cap C^{\alpha+\beta'}(\Gamma')$. 若 $u\in H_{x_0}^s$，$s<0$ 而 $v\in H_{x_0}^\beta \cap H^{\beta'}(\Gamma)$，则*

$$T_u v \in H_{x_0}^{s+\beta} \cap H^{s+\beta'}(\Gamma').$$

证 与引理 2.2.6 几乎完全一致，只不过要注意这时

$$\| S_q u \|_{L^\infty} \leqslant C \sum_{p=-1}^{q-N_0} 2^{-p\alpha} \leqslant C 2^{-q\alpha},$$

$$\begin{aligned}\| S_q u \|_{L^2} &\leqslant \sum_{p=-1}^{q-N_0} c_p 2^{-ps} \leqslant \Big(\sum_{p=-1}^{q-N_0} c_p^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{p=-1}^{q-N_0} 2^{-2ps}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C 2^{-qs}.\end{aligned}$$

定理 2.2.4 之证明 我们只对 Hölder 空间的情况给予证明，因为 Sobolev 空间的情况是一样的. 这时

$$u \cdot v = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

1）若 $\alpha>0$，$\beta>0$，则由引理 2.2.6，

$$T_u v \in C_{x_0}^\beta \cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\beta'}, \quad T_v u \in C_{x_0}^\alpha \cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha'}.$$

由引理 2.2.5，$R(u,v)\in C_{x_0}^{\alpha+\beta}$，当然 $C_{x_0}^{\alpha+\beta}\subset C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha+\beta}$，由此即得定理的结论.

2）若 $\alpha<0$，由于 $\alpha+\beta>0$，必有 $\beta>0$ 从而 $v\in L^\infty$. 因此

$$T_u v \in C_{x_0}^{\alpha+\beta}, \quad (\text{引理 } 2.2.7)$$

$$T_v u \in C_{x_0}^{\alpha} \cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha'}, \quad (\text{引理 } 2.2.6)$$

$$R(u,v) \in C_{x_0}^{\alpha+\beta}, \quad (\text{引理 } 2.2.5).$$

于是 $u\cdot v\in C_{x_0}^{\gamma} \cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\gamma'}$，$\gamma=\alpha=\min\{\alpha,\beta\}$，

$$\gamma' = \min\{\alpha', \alpha+\beta\} \geqslant \min\{\alpha', \beta', \alpha+\beta\}.$$

$\beta<0$，$\alpha+\beta>0$ 的情况与此相同.

在讨论 Sobolev 空间情况时要用嵌入定理，例如 $H^s\subset C^{s-n/2}$，然后再用以上引理.

在上一段末尾作为一个推论(推论 2.2.3)有 H^s 当 $s>n/2$ 时为一代数，现在可以进一步得出

推论 2.2.8 1）*若 $s>n/2$，则 H^s 是一个代数.*

2）*若 $0<\alpha'\leqslant 2\alpha$，则 $C_{x_0}^\alpha \cap C_{(x_0,\xi_0)}^{\alpha'}$ 是一个代数.*

3）*若 $s>n/2$，$s'\leqslant 2s-n/2$，则 $H_{x_0}^s \cap H_{(x_0,\xi_0)}^{s'}$ 是一个代数.*

在非线性偏微分方程理论中会遇到以下的问题：例如考虑半线性方程

$$P_m(x,\mathrm{D})u + F(x,u,\nabla u,\cdots,\nabla^{m-1}u) = 0,$$

P_m 是 m 阶线性偏微分算子，F 是其各个变元的 C^∞ 函数，如果我们在 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中求得解 u，则 $\nabla u,\cdots,\nabla^{m-1}u$ 将分别属于 $H^{s-1}(\mathbf{R}^n),\cdots,H^{s-m+1}(\mathbf{R}^n)$，从而 $F(x,u,\nabla u,\cdots,\nabla^{m-1}u)$ 是否有意义，是否仍能与 $P_m(x,\mathrm{D})u\in H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ 在同一个空间中将是严重的问题. 现在我们将用 L-P 分解(用它的连续形式，定理 2.1.2 的注

2)来讨论这个问题. 我们要证明下面的

定理 2.2.9 *若 $u\in L^\infty\cap H^s$ 是实值函数，$s\geqslant 0$，则若 $F\in C^\infty$ 且 $F(0)=0$，则 $F(u)\in L^\infty\cap H^s$.*

证 $s=0$ 的情况不必证明，因为我们有

$$|F(u)|=|F(u)-F(0)|\leqslant \sup|F'(u)|\cdot|u|=C|u|,$$

因为 $u\in L^\infty$，故 $|u|\leqslant M$，这里的 $\sup|F'(u)|$ 即指 $\sup\limits_{|u|\leqslant M}|F'(u)|=C$. 右方属于 $H^0=L^2$，故左方也一样. 下面我们只讨论 $s>0$ 的情况.

为什么要设 $F(0)=0$? 因为不如此，甚至当 $u\equiv 0$ 时因为 $F(0)\notin H^s(\mathbf{R}^n)$，而定理也不能成立.

现在再把 L-P 分解的连续形式重复一下. 选 $\psi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使当 $|\xi|\leqslant K^{-1}<1$ 时 $\psi=1$ 而且 $\mathrm{supp}\,\psi\subset\{\xi;\ |\xi|\leqslant 1\}$. 用下式来定义 $\varphi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(\xi/t)=\frac{1}{t}\varphi(\xi/t),$$

于是 $\mathrm{supp}\,\varphi(\xi)\subset\{\xi;\ K^{-1}\leqslant|\xi|\leqslant 1\}$，这是一个环形，而且有

$$1=\psi(\xi)+\int_1^\infty\frac{1}{t}\varphi(\xi/t)\mathrm{d}t,$$

我们还有

$$\psi(\xi)+\int_1^T\frac{1}{t}\varphi(\xi/t)\mathrm{d}t=\psi(\xi/T),\quad T>1. \tag{2.2.12}$$

现在取 $u\in L^\infty\subset\mathscr{S}'(R^n)$，令

$$u_1(x)=\psi(\mathrm{D})u=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因为 $\psi(\xi)$ 有紧支集，故 $u_1(x)\in C^\infty$. 记

$$u_t(x)=\psi(\mathrm{D}/t)u, \tag{2.2.13}$$

应有(· 表示对 t 求导)

$$\dot{u}_t(x)=(2\pi)^{-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi/t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\frac{1}{t}\varphi(\xi/t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{t}\varphi(\mathrm{D}/t)u.$$

双方对 t 求积分，注意到

$$u_\infty(x)=\lim_{t\to\infty}\psi(D/t)u=\lim_{t\to\infty}(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi/t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi=u(x),$$

有 $u(x)-u_1(x)=\int_1^\infty\frac{1}{t}\varphi(\mathrm{D}/t)u\mathrm{d}t$，即

$$u(x)=\psi(\mathrm{D})u+\int_1^\infty\frac{1}{t}\varphi(\mathrm{D}/t)u\mathrm{d}t.$$

同样用(2.2.12)和(2.2.13)，

$$u_T(x)=\psi(\mathrm{D})u+\int_1^T\frac{1}{t}\varphi(\mathrm{D}/t)u\mathrm{d}t=\psi(\mathrm{D}/T)u.$$

若记 $\psi(\xi)=\hat{\Psi}(\xi)$，则 $\Psi(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，而

$$\psi(\xi/T)=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x/T}\Psi(x)\mathrm{d}x=T^n\hat{\Psi}(T\,\cdot),$$

$$u_T=\psi(\mathrm{D}/T)u=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi/T)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}T^n\hat{\Psi}(T\,\cdot)(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}T^n\Psi*u. \tag{2.2.14}$$

但 Ψ 实际上起了磨光算子的作用，因为

$$(2\pi)^{-n}\int T^n\Psi(Tx)\mathrm{d}x=(2\pi)^{-n}\int\Psi(x)\mathrm{d}x=\psi(0)=1,$$

故

$$u_T(x)=(2\pi)^{-n}\int T^n\Psi(T(x-y))u(y)\mathrm{d}y.$$

因此易证当 $T\to\infty$ 时几乎处处有 $u_T(x)\to u(x)$，而且

$$|u_T(x)|\leqslant C\|u\|_{L^\infty}. \tag{2.2.15}$$

现在来证明我们的定理. 由于 $F\in C^\infty$，所以几乎处处有

$$\lim_{T\to\infty}F(u_T)=F(u); \tag{2.2.16}$$

另一方面，

$$F(u_T)=F(u_1)+\int_1^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u_t)\mathrm{d}t$$
$$=F(u_1)+\int_1^T F'(u_t)\dot{u}_t\mathrm{d}t$$

$$= F(u_1) + \int_1^T F'(u_t)\varphi(\mathrm{D}/T)u \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

所以

$$F(u) = F(u_1) + \int_1^\infty F'(u_t)\varphi(\mathrm{D}/T)u \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{2.2.17}$$

右方第一项显然属于 C^∞，因为 $u_1 \in C^\infty$. 为了研究第二项，引进一个线性偏微分算子

$$L_u(g) = \int_1^\infty F'(u_t)\varphi(\mathrm{D}/t)g \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n). \tag{2.2.18}$$

它实际上是一个拟微分算子，因为

$$\begin{aligned} L_u(g) &= \int_1^\infty F'(u_t)(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\varphi(\xi/t)\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}\left(\int_1^\infty F'(u_t)\varphi(\xi/t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= a(x,\mathrm{D})g, \end{aligned}$$

$$a(x,\xi) = \int_1^\infty F'(u_t)\varphi(\xi/t)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{2.2.19}$$

我们要证明 $a(x,\xi) \in S^0_{1,1}$. 事实上，$a \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$是显然的. 若将 $a(x,\xi)$对 x 求微商，利用(2.2.14)（将其中的 T 换成 t），将有

$$|\mathrm{D}_x^\alpha u_t| \leqslant C_\alpha t^{|\alpha|}.$$

对 ξ 求微商时，则利用

$$|\partial_\xi^\beta \varphi(\xi/t)| \leqslant C_\beta t^{-|\beta|}.$$

然而(2.2.19)之积分域实际上是 $K^{-1} \leqslant |\xi/t| \leqslant 1$，因此 $t \sim (1+|\xi|)$. 这样即有

$$|\partial_\xi^\beta \mathrm{D}_x^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|}. \tag{2.2.20}$$

把这些结果代入(2.2.17)有

$$F(u) = F(u_1) + a(x,\mathrm{D})u. \tag{2.2.21}$$

注意，$S^0_{1,1}$如我们在第 1 章所指出的，是一个坏类. 一般说来，它不是 $L^2 = H^0$ 到 L^2 的有界算子. 但是对于 $s>0$，它恰好是 H^s 到 H^s 的有界算子. 暂时承认这一点，定理得证.

注 1 当 u 是一个 N 维向量时，上面的论证当然仍成立. 对于

$F(x,u)$，只要 $F(x,0)=0$ 这个结论也是对的. 特别是若记 u 为一向量$(v, \nabla v, \cdots, \nabla^{m-1}v)$，立即可知，当 $v \in H^s$ 时，$F(x,v,\nabla v,\cdots,\nabla^{m-1}v) \in H^{s-m+1}$.

注 2 若我们只讨论空间 H^s_{loc}，则 $F(0)=0$ 的条件可以不要.

2.3 仿微分算子

本节内容较多，因此分作几点来叙述.

2.3.1 仿积

一个函数 $a(x)$可以成为某空间 L 上的乘子，即对任一 $u(x) \in L$，可定义乘子运算(乘法)

$$a(x)\cdot : L \to L, \quad u \to au,$$

这种情况是不多的. 2.2 节中讲了一些有关乘法的例子. 但这里情况又不尽相同. 记乘子空间为 M，在乘子运算中，M 与 L 处于不对称的地位. 如果记将定义的乘子运算为 T_a，则现在考虑的是 T_a：$L \to L$ 作为一个算子的种种性质. 在乘积问题中，因为 M 与 L 是对称的，故不但要考虑 a 作为 $u \in L$ 上的乘子，同时也要考虑 u 作为 $a \in M$ 上的乘子. 所以在 2.2 节中我们讨论的是“乘积”(至少是用 L-P 分解后所得的“形式”乘积)与$(T_a u + T_u a)$之差(例如，见(2.2.11)式). 现在则应重新定义 T_a.

$a(x)\cdot$ 可以看成一个 0 阶 PsDO:

$$a(x)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{2.3.1}$$

它的象征是 $a(x)$，一般说来它是非光滑的. 因此，我们要设法将它光滑化，这样做就会产生一定的误差. 在经典的 PsDO 理论中，我们可以用无限的渐近展开式，并认为 $S^{-\infty}$ 象征与相应的算子 $\mathrm{Op}(S^{-\infty})$是可以忽略的. 现在我们只能用有限展开式，并认为某种正则化算子是可以忽略的. 这一点将在定义 2.3.1 中说明.

将(2.3.1)正则化有两种方法，其一是利用卷积. 因为至少形

式地有

$$a(x)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\int \hat{a}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta,$$

如果在上式中引入适当的截断算子 $\chi(\theta,\eta)$，而定义

$$(T_a u)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \chi(\xi-\eta,\eta)\hat{a}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta, \qquad (2.3.2)$$

则这样的 T_a 将具有我们所需的性质．另一种方法是利用 L-P 分解，仿照 2.2 节，在形式乘积 $\sum_{p,q} a_p u_q$ 中只保留"相距不远"的 p 和 q 所相应的项，而定义

$$\widetilde{T}_a u = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} a_p u_q = \sum_q (S_q a) u_q = \sum_q f_q, \qquad (2.3.3)$$

$$S_q a = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} a_p.$$

也可以得到所需的结果．T_a 或 $\widetilde{T}_a$ 即称为仿积，它是最简单的仿微分算子(以下简称为 ParaDO)．下面我们将平行地利用 T_a 与 $\widetilde{T}_a$，这样更为便利．

现在准确地介绍仿积理论．因为乘法运算显然有局部性，故不妨认为 $a(x)$已局部化．所以下面恒以 $a(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$且有紧支集作为至少的假设．

定义 2.3.1 *若有实数 ρ 存在，使对一切实数 α 与 s，算子 T 均为 $H^s\to H^{s+\rho}$ 或 $C^\alpha\to C^{\alpha+\rho}$ 有界的，则称 T 为 ρ-正则化算子．*

注意定义中的 ρ 容许为负，这时 T 实际上降低了正则性．

定义 2.3.2 *设 $a(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$具有紧支集，定义(2.3.2)中的 T_a 与(2.3.3)中的 $\widetilde{T}_a$ 为仿积算子．在(2.3.2)中，我们设 $C^\infty((\mathbf{R}^n\backslash 0)\times(\mathbf{R}^n\backslash 0))$ 函数 $\chi(\theta,\eta)$是 0 阶正齐次的，而且有充分小的正常数 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 使*

$$\begin{cases} \chi(\theta,\eta) = 1, & \text{当 } |\theta|\leqslant \varepsilon_1|\eta| \text{ 时}, \\ \chi(\theta,\eta) = 0, & \text{当 } |\theta|\geqslant \varepsilon_2|\eta| \text{ 时}. \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

注 1 具有紧支集的 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$函数当然属于 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，所以可以作其 Fourier 变换 $\hat{a}(\xi-\eta)$与 L-P 分解$\{a_p\}$．

注 2 T_a 与 $\widetilde{T}_a$ 均称为仿积，下面我们要证明，当 $a\in C^\rho$ 且 $\rho>0$ 时，$T_a-\widetilde{T}_a$ 是 ρ-正则化算子，因此 T_a 与 $\widetilde{T}_a$ 可以换用．

注 3 $\chi(\theta,\eta)$可以用下法作出．取一函数 $g(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$使当 $|t|\leqslant\varepsilon_1$ 时 $g(t)\equiv 1$，$|t|>\varepsilon_2$ 时 $g(t)\equiv 0$，于是可以取

$$\chi(\theta,\eta) = g(\theta/|\eta|).$$

定理 2.3.3 *若 $a(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$且有紧支集，则算子 T_a 与 $\widetilde{T}_a$：$C^\alpha\to C^\alpha$ 或 $H^s\to H^s$ 均为有界的，而且其算子范数 $\|\widetilde{T}_a\|$（或 $\|T_a\|$）$\leqslant C\|a\|_{L^\infty}$．$\alpha, s$ 是任意实数，但 α 不是整数．*

证 我们只对 $u\in C^\alpha$ 而 $0<\alpha<1$ 的情况来证明结论．其他情况的证法是类似的．先讨论算子 $\widetilde{T}_a$．$\widetilde{T}_a$ 实际上即 2.2 节(2.2.11)中的 T_u．不过现在以 a 作为 u，而现在的 u 即那里的 v．于是，由引理 2.2.6，$\widetilde{T}_a u\in C^\alpha$，我们只要估计其范数即可．

由(2.3.3)，

$$\|f_q\|_{L^\infty} \leqslant \|S_q(a)\|_{L^\infty}\cdot\|u_q\|_{L^\infty}.$$

但由定理 2.1.2 有

$$(S_q(a))\hat{}(\xi) = \sum_{p=-1}^{q-N_0}\hat{a}_p(\xi) = \Big(\sum_{p=-1}^{q-N_0}\varphi_p(\xi)\Big)\hat{a}(\xi)$$
$$= \psi(2^{-q+N_0-1}\xi)\hat{a}(\xi).$$

今取一函数 $h(x)\in\mathscr{S}$使 $\hat{h}(\xi)=\psi(\xi)$，则有

$$S_q(a)(x) = C\int h(y)a(x-2^k y)dy,$$

$k=-q+N_0-1$，因此

$$\|S_q(a)(x)\|_{L^\infty}\leqslant C\|a\|_{L^\infty}.$$

再由定理 2.1.7 的证明中的(2.1.29)式，有

$$\|u_q\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-q\alpha}|u|_\alpha.$$

因此

$$\|\widetilde{T}_a u\| = \Big\|\sum_q (S_q a)u_q\Big\|_{L^\infty} \leqslant C_1\|a\|_{L^\infty}\cdot\sum_q 2^{-q\alpha}\cdot|u|_\alpha$$
$$= C\|a\|_{L^\infty}\cdot|u|_\alpha.$$

此即

$$\|\widetilde{T}_a\|\leqslant C\|a\|_{L^\infty}.$$

再看算子 T_a 的情况. 仍对 a,u 应用 L-P 分解, 并设环形分解中的常数为 K, 于是

$$\hat{T}_a u(\xi) = (2\pi)^{-n}\sum_p\sum_q\int\chi(\xi-\eta,\eta)\hat{a}_p(\xi-\eta)\hat{u}_q(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{2.3.5}$$

而且按 L-P 分解的定义可知, 除非 $p,q=-1$ 有

$$\operatorname{supp}\hat{u}_q(\eta)\subset\{\eta;\ K^{-1}2^q\leqslant|\eta|\leqslant K2^{q+1}\},$$

$$\operatorname{supp}\hat{a}_p(\xi-\eta)\subset\{\eta;\ K^{-1}2^p\leqslant|\xi-\eta|\leqslant K2^{p+1}\}.$$

所以

$$K^{-2}2^{p-q-1}\leqslant\frac{|\xi-\eta|}{|\eta|}\leqslant K^2 2^{p-q+1}.$$

这样, 必存在正整数 $0<N_1<N_2$ 使

$$2^{-N_1}\geqslant 2\varepsilon_2 K^2,\quad 2^{-N_2}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1 K^{-2}.$$

于是在积分(2.3.5)中, 当 $p\leqslant q-N_2$ 时, $|\xi-\eta|/|\eta|\leqslant\varepsilon_1$ 而 $\chi\equiv1$; 当 $p\geqslant q-N_1(p\neq-1)$时, $|\xi-\eta|/|\eta|\geqslant\varepsilon_2$ 而 $\chi\equiv0$. 代入(2.3.5)有

$$T_a u(x) = \sum_{p\leqslant q-N_2}a_p(x)u_q(x)+Ru, \tag{2.3.6}$$

$$Ru(x)=\sum_{q-N_2<p<q-N_1}(2\pi)^{-2n}\iint e^{\mathrm{i}x(\theta+\eta)}\chi(2^{-p}\theta,2^{-q}\eta)\hat{a}_p(\theta)\hat{u}_q(\eta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta.$$

$Ru(x)$之积分实际上只是在"双环"

$$K^{-1}2^{-N_2}\leqslant|\theta|\leqslant 2K,\quad K^{-1}2^{-N_2}\leqslant|\eta|\leqslant 2K$$

上进行的, 所以一定可以找到函数 $r(s,t)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$使它的 Fourier 变换就是 $\chi(\theta,\eta)$. 因此

$$\begin{aligned}Ru(x)&=\sum_{q-N_2<p<q-N_1}(2\pi)^{-2n}\iint e^{\mathrm{i}x(\theta+\eta)}\hat{r}(2^{-p}\theta,2^{-q}\eta)\hat{a}_p(\theta)\hat{u}_q(\eta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta\\&=\sum_{q-N_2<p<q-N_1}\iint r(s,t)a_p(x-2^{-p}s)u_q(x-2^{-q}t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\sum_q\sum_{q-N_2<p<q-N_1}f_{p,q}=\sum_q f_q.\end{aligned}$$

这里

$$f_{p,q}(x)=\iint r(s,t)a_p(x-2^{-p}s)u_q(x-2^{-q}t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$f_q(x)=\sum_{q-N_2<p<q-N_1}\iint r(s,t)a_p(x-2^{-p}s)u_q(x-2^{-q}t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

容易看到 $\operatorname{supp}\hat{f}_q\subset C'_q$, 而当 $a\in L^\infty$时有:

若 $u\in C^\alpha$,

$$\|f_q\|_{L^\infty}\leqslant C\|a\|_{L^\infty}\|u_q\|_{L^\infty}\leqslant C\|a\|_{L^\infty}c_q 2^{-q\alpha},$$

若 $u\in H^s$,

$$\|f_q\|_{L^2}\leqslant C\|a\|_{L^\infty}\|u_q\|_{L^2}\leqslant C\|a\|_{L^\infty}c_q 2^{-qs},$$

其中$\{c_q\}\in l^2$. 由此立即可知 Ru 映 C^α(或 H^s)到其自身, 而且算子范数$\leqslant C\|a\|_{L^\infty}$. 但是(2.3.6)中的第一项即是 $\widetilde{T}_a u$ (令 N_0 为 N_2-1), 但我们已对 $\widetilde{T}_a$ 证明了它是映 C^α(或 H^s)到其自身的算子, 且其算子范数$\leqslant C\|a\|_{L^\infty}$. 因此定理得证.

现在进一步证明

定理 2.3.4 *若 $a\in C^\rho$, 且 $\rho>0$ 而非整数, 则 $T_a-\widetilde{T}_a$ 是 ρ-正则化算子.*

证 定理 2.3.3 的证明中已指出 $T_a-\widetilde{T}_a=Ru$ ($Ru=\sum_q f_q$), 而且当 $a\in L^\infty$ 时, R: $C^\alpha\to C^\alpha$ (或 $H^s\to H^s$) 且其算子范数$\leqslant C\|a\|_{L^\infty}$. 但还有 $a\in C^\rho$, 故$\|a_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\rho}$, 因此

$$\begin{aligned}\|f_q\|_{L^\infty}&\leqslant C\Big(\sum_{q-N_2\leqslant p\leqslant q-N_1}\|a_p\|_{L^\infty}\Big)\cdot\|u_q\|_{L^\infty}\\&\leqslant C|a|_\rho 2^{-q\rho}\|u\|_{L^\infty}2^{-q\alpha}\\&\leqslant C|a|_\rho\|u\|_{L^\infty}2^{-q(\rho+\alpha)},\end{aligned}$$

当 $u\in H^s$ 时则有

$$\begin{aligned}\|f_q\|_{L^2}&\leqslant C\Big(\sum_{q-N_2\leqslant p\leqslant q-N_1}\|a_p\|_{L^\infty}\Big)\cdot\|u_q\|_{L^2}\\&\leqslant C|a|_\rho\|u\|_{L^2}2^{-q(\rho+s)},\end{aligned}$$

因此定理证毕.

从上面给的定义看到, T_a 的定义依赖于 χ 的选取, 而 $\widetilde{T}_a$ 的定义则依赖于 L-P 分解的选取. 由定理 2.3.4 可以证明这并不发生本

质的影响. 事实上我们有

定理 2.3.5 设相应于 χ 的不同选取有仿积 $T_a^{(1)}$ 与 $T_a^{(2)}$，相应于不同的 L-P 分解，有仿积 $\widetilde{T}_a^{(1)}$ 与 $\widetilde{T}_a^{(2)}$，则当 $a\in C^\rho$ 具有紧支集且 $\rho>0$ 非整数时，$T_a^{(1)}-T_a^{(2)}$ 与 $\widetilde{T}_a^{(1)}-\widetilde{T}_a^{(2)}$ 均为 ρ-正则化算子.

证 先看 $\widetilde{T}_a^{(1)}-\widetilde{T}_a^{(2)}$. 任取一个 χ 并作 T_a，则由定理 2.3.4 可知

$$\widetilde{T}_a^{(1)}-\widetilde{T}_a^{(2)}=(\widetilde{T}_a^{(1)}-T_a)-(\widetilde{T}_a^{(2)}-T_a)$$

是 ρ-正则化算子.

至此我们得知，在定义仿积时无论是用 T_a 还是 $\widetilde{T}_a$，也不论 χ 或 L-P 分解如何选取，其结果在相差一个 ρ-正则化算子的意义下是完全相同的. 当然这里假设了 $a\in C^\rho$，$\rho>0$ 非整数，且 a 有紧支集.

以下我们将讨论一般的 ParaDO 的算子演算，但这时会用到仿积作为算子(仿积是 0 阶 ParaDO)的演算. 所以我们给出下面的定理.

定理 2.3.6 1) 设 $a,b\in C^\rho(\rho>0$ 非整数)且有紧支集，则作为 $C^\alpha\to C^\alpha$ 或 $H^s\to H^s$ 的算子有 $T_a\circ T_b-T_{ab}$ 是 ρ-正则化算子，且其算子范数 $\leqslant C|a|_\rho|b|_\rho$，这里 α,s 是任意实数，但 $\alpha\notin\mathbf{Z}$.

2) 对 a 的假设同上，则作为 $H^s\to H^s$ 的算子 $T_a^*-T_a$ 也是 ρ-正则化算子，且其算子范数 $\leqslant C|a|_\rho$.

证 1) 我们只对 $u\in C^\alpha$，$0<\alpha<1$ 的情况给出证明. 于是设 $\{u_p\},\{a_p\},\{b_p\}$ 分别是 u,a,b 的 L-P 分解，则由定理 2.3.3，$T_bu\in C^\alpha$. 因为 T_a,T_b 与 $\widetilde{T}_a,\widetilde{T}_b$ 可以换用而最多只相差一个 ρ-正则化算子，所以可以取充分大的正整数 $N_1<N_2$，并用(2.3.3)写出

$$T_bu=\sum_q\sum_{p_2\leqslant q-N_2}b_{p_2}u_q+Ru=\sum_q v_q+Ru,$$

$$v_q=\sum_{p_2\leqslant q-N_2}b_{p_2}u_q=\Big(\sum_{p_2\leqslant q-N_2}b_{p_2}\Big)u_q=S_q(b)u_q.$$

这里 R 是 ρ-正则化算子，而

$$\operatorname{supp}\hat{v}_q=\operatorname{supp}[(S_q(b))\hat{}*\hat{u}_q]\subset C_q+B(0,C2^q)\subset C_q'$$

是一个环形. 于是

$$T_a\circ T_bu=\sum_q\sum_{p_1,p_2\leqslant q-N_2}a_{p_1}b_{p_2}u_q+R'(u),\qquad(2.3.7)$$

R' 也是一个 ρ-正则化算子.

另一方面

$$\begin{aligned}T_{ab}u&=\sum_q\sum_{p\leqslant q-N_1}(ab)_pu_q+R''(u)\\&=\sum_q\Big(\sum_{p_1,p_2}\psi(2^{-q+N_1}\mathrm{D})a_{p_1}b_{p_2}\Big)u_q+R''(u).\qquad(2.3.8)\end{aligned}$$

$R''(u)$ 也是一个 ρ-正则化算子，且其算子范数 $\leqslant C|a|_\rho|b|_\rho$，而 N_1 是一个适当选定的正整数. 现在决定 N_1,N_2 如下：当 $p_1\leqslant q-N_2$，$p_2\leqslant q-N_2$ 时，在 $\operatorname{supp}(a_{p_1}b_{p_2})\hat{}$ 上 $\psi(2^{-q+N_1}\xi)=1$；当 $p_1\geqslant q$ 而 $p_2\leqslant p_1-N_3$ (N_3 是一个适当正整数)时，在 $\operatorname{supp}(a_{p_1}b_{p_2})\hat{}$ 上 $\psi(2^{-q+N_1}\xi)=0$.

比较(2.3.7)与(2.3.8)知

$$T_{ab}u-T_a\circ T_bu=\widetilde{\sum_{q,p_1,p_2}}\psi(2^{-q+N_1}\mathrm{D})a_{p_1}b_{p_2}u_q+R'(u)+R''(u).$$

$\widetilde{\sum}_{q,p_1,p_2}$ 中包含以下类型的项：$p_1>q-N_2$ 或 $p_1=q-\nu$ 而 $0<\nu<N_2$，这种项记为

$$R_\nu u=\sum_q\Big(\sum_{p\leqslant q}\psi(2^{-q+N_1}\mathrm{D})a_{q-\nu}b_p\Big)u_q=\sum f_qu_q.$$

另外一些项则为 $p_1\geqslant q$，而 $p_2=p_1-\nu$，$0<\nu<N_3$，这种项记作

$$S_\nu u=\sum_q\psi(2^{-q+N_1}\mathrm{D})\Big(\sum_{p\geqslant q}a_pb_{p-\nu}\Big)u_q=\sum g_qu_q.$$

再则是将 p_1 与 p_2 对调所得之项. 只要 N_1,N_2 取得充分大，则 $\operatorname{supp}(f_qu_q)\hat{}$ 与 $\operatorname{supp}(g_qu_q)\hat{}$ 均在某一环 C_q' 中，而且

$$\|f_q\|_{L^\infty},\ \|g_q\|_{L^\infty}\leqslant C|a|_\rho|b|_\rho2^{-q\rho}.$$

所以 R_ν,S_ν 也都是 ρ-正则化算子. 于是 1)得证.

2) 取 $u\in H^s$，$v\in H^{-s}$，应用伴算子的定义，并用 $\widetilde{T}_a$ 代替 T_a，有

$$(T_a^*u,v)=(u,T_av)=\sum_{p\leqslant r-N_0}\int u_q\bar{a}_p\bar{v}_r\,\mathrm{d}x,$$

$$(T_a u, v) = \sum_{p \leqslant q - N_0} \int \bar{a}_p u_q \bar{v}_r \mathrm{d}x.$$

只相差一个 ρ-正则化算子，所以，余项可以估计为 $\leqslant C|a|_\rho \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s-\rho}}$. N_0 是一个正整数. 但一定存在一个正整数 N_1，使在以上两式中，若 $|q-r|>N_1$，则当 $p \leqslant r-N_0$ 时，$\hat{u}_q$ 与 $(a_p v_r)\hat{}$ 之支集互不相交. $(\bar{a}_p u_q)\hat{}$ 与 $\hat{v}_r$ 之支集也不相交. 所以以上两式中相应于这些指标的各项均为 0，故若记 $q=p+\nu_1$，$r=p+\nu_2$，则有

$$|(T_a^* u, v) - (T_a u, v)| \leqslant \sum_p \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \int |a_p||u_{p+\nu_1}||v_{p+\nu_2}|\mathrm{d}x + C|a|_\rho \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s-\rho}}. \quad (2.3.9)$$

这里的求和，对每一个固定的 p 只有有限项. 对于每一项，均有以下估计式：

$$\int |a_p||u_{p+\nu_1}||v_{p+\nu_2}|\mathrm{d}x \leqslant \|a_p\|_{L^\infty} \|u_{p+\nu_1}\|_{L^2} \|v_{p+\nu_2}\|_{L^2} \leqslant C|a|_\rho 2^{-p\rho} c_{p+\nu_1} 2^{-sp} d_{p+\nu_2} 2^{(s+\rho)p}.$$

这由 $\{c_q\}, \{d_q\} \in l^2$，且

$$\|\{c_q\}\|_{l^2} \leqslant C\|u\|_{H^s},$$
$$\|\{d_q\}\|_{l^2} \leqslant C\|v\|_{H^{-r-\rho}}.$$

将以上结果代入(2.3.9)即知

$$|(T_a^* u, v) - (T_a u, v)| \leqslant C|a|_\rho \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-r-\rho}},$$

从而定理得证.

2.3.2 具有齐次象征的仿微分算子

前面我们已说过，乘子运算可以看做是 0 阶 PsDO，而一般的以 $l(x,\xi)$ 为象征的 PsDO 也可以看做是先以"乘子"$l(x,\xi)$ 乘 $\hat{u}(\xi)$ 再作逆 Fourier 变换. 所以我们仍要从仿积开始. 我们先设 $l(x,\xi)$ 定义于 $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ 中，为了使它局部化，仍设 $l(x,\xi)$ 对 x 有紧支集. 对于 ξ 则设 $l(x,\xi)$ 是 m 次正齐次函数. 关于其光滑性，则设 $l(x,\xi)$ 对 ξ 属于 C^∞ 于 $\xi \neq 0$ 处，而对一切 $\alpha \in \mathbf{N}^n$，$D_\xi^\alpha l(x,\xi)$ 对 x 则属于 C^ρ，$\rho>0$ 且为非整数. 这样的 $l(x,\xi)$ 之集记作 l_ρ^m.

定义 2.3.7 我们定义以 $l(x,\xi) \in l_\rho^m$ 为象征的仿微分算子 ParaDO T_l 如下：

$$(T_l u)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta,\eta) \hat{l}(\xi-\eta,\eta) s(\eta) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\eta. \quad (2.3.10)$$

这里 $\chi(\theta,\eta)$ 之定义见(2.3.4)式，$s(\eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 而在 $\eta=0$ 附近 $s=0$，而 $\mathbf{R}_\eta^n$ 的某一紧集之外 $s \equiv 1$. $\hat{l}$ 表示 $l(x,\xi)$ 对 x 的 Fourier 变换，$u(x)$ 暂设为 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 广义函数.

T_l 之集记为 $\mathrm{Op}(l_\rho^m)$.

l_ρ^m 类中的函数可以用球面调和 $\{h_\nu(\xi)\}$ 展开如下：

$$l(x,\xi) = \sum_\nu a_\nu(x) h_\nu(\xi). \quad (2.3.11)$$

所谓球面调和，即单位球面 S^{n-1}：$\sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 1$ 上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 之特征函数：即存在特征值 λ_j 以及相应的 $\tilde{h}_j(\xi) \not\equiv 0$ 使 $\Delta \tilde{h}_j = \lambda_j \tilde{h}_j$. $\{\tilde{h}_j\}$ 是 $L^2(S^{n-1})$ 上的就范的正交系；$\{\lambda_j\}$ 有如下的渐近性质：存在常数 $M>0$ 使 $\lambda_j \sim C_j^M$. $h_\nu(\xi)$ 即 $\tilde{h}_\nu(\xi)$ 之 m 次齐性拓展：$h_\nu(\xi) = |\xi|^m \tilde{h}_\nu(\xi/|\xi|)$，这时可以证明(2.3.11)成立，而且 $a_\nu(x) \in C^\rho$，且有不依赖于 ν 的紧支集，$|a_\nu|_\rho$ 对 ν 是急减的，而对一切 α，$|D_\xi^\alpha h_\nu(\xi)|_{C^N(S^{n-1})}$ 对 ξ 是缓增的：

$$|D_\xi^\alpha h_\nu(\xi)|_{C^N(S^{n-1})} \leqslant C_N \nu^{\frac{M}{2}(N+\frac{n}{2}+1)}.$$

关于球面调和的进一步的知识可以参看 R. Coifman 和 Y. Meyer [C-M].

现以(2.3.11)代入(2.3.10)，注意到

$$\hat{l}(\xi-\eta,\eta) = \sum_\nu \hat{a}_\nu(\xi-\eta) h_\nu(\eta)$$

即得

$$\begin{aligned}
&(T_{l(x,\xi)} u)\hat{}(\xi) \\
&= \sum_\nu (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta,\eta) \hat{a}_\nu(\xi-\eta) s(\eta) h_\nu(\eta) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\eta \\
&= \sum_\nu (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta,\eta) \hat{a}_\nu(\xi-\eta) (s(\mathrm{D}) h_\nu(\mathrm{D}) u)\hat{}(\eta) \mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

$$=\Big(\sum_{\nu} T_{a_\nu}\circ (S(D)h_\nu(D))u\Big)\hat{}\,(\xi). \qquad (2.3.12)$$

所以仿微分算子成了经典的 PsDO $S(D)h_\nu(D)\in \mathrm{Op}(S^m_{1,0})$ 与仿积 T_{a_ν} 的复合. T_{a_ν} 作为一个算子(不论是 $C^\alpha\to C^\alpha$ 或 $H^s\to H^s$),其范数 $\leqslant C|a_\nu|_\rho$,对 ν 急减,而 $\|S(D)h_\nu(D)\|$ 对 ν 则是缓增的,因此 (2.3.12)中的级数 $\sum_\nu T_{a_\nu}\circ(S(D)h_\nu(D))$ 按算子范数收敛,从而当 $u\in C^\alpha$ 或 $u\in H^s$ 时(2.3.12)均收敛,且 T_l: $C^\alpha\to C^{\alpha-m}$ 或 $H^s\to H^{s-m}$ 是有界的. 概括起来,我们有

定理 2.3.8 对于 $l\in l^m_\rho$,算子 T_l: $C^\alpha\to C^{\alpha-m}$ 或 $H^s\to H^{s-m}$ (α,s 是任意实数,但 α 非整数)是有界的.

下面我们要讨论 T_l 的算子演算. 和经典的 PsDO 理论一样,我们要证明这种演算与象征 $l(x,\xi)$ 的代数演算同构. 区别在于现在 $l(x,\xi)$ 对 x 属于 C^ρ,因而在 $D^\alpha_x l(x,\xi)$ 中只能容许 $|\alpha|\leqslant[\rho]$,于是在 PsDO 中起重要作用的渐近展开现在要代以有限展开. 在 PsDO 理论中,$\mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 是略去不计的,现在则 ρ 正则化算子(其类记作 $\mathrm{Op}(S^{-\rho})$)应略去不计.

在讨论算子演算时,下面的定理是很重要的.

定理 2.3.9 设 $h(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 对 ξ 有 m 次正齐性,$a\in C^\rho$ ($\rho>0$ 非整数)具有紧支集,则作为 $C^\alpha\to C^{\alpha-m}$ 或 $H^s\to H^{s-m}$ (α,s 是任意实数,但 α 非整数)的算子

$$R=h(D)\circ T_a-\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}T_{D^\alpha a}\circ h^\alpha(D)\in \mathrm{Op}(S^{-\rho+m}),$$

而且有适当正整数 M,使

$$\|R\|\leqslant C|a|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}.$$

证 如前所述,T_a 可以用 $\widetilde{T}_a$ 代替,再注意到

$$(h^\alpha(D)u)\hat{}_q=h^\alpha(\xi)\varphi_q(\xi)\hat{u}(\xi)=h^\alpha(\xi)\hat{u}_q(\xi),$$

从而 $(h^\alpha(D)u)_q=h^\alpha(D)u_q$,知道 Ru 可以代以

$$R'u=\sum_q\sum_{p\leqslant q-N_0}h(D)a_pu_q-\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\sum_q\sum_{p\leqslant q-N_0}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha a)_p h^\alpha(D)u_q.$$

这里用的 L-P 分解假设是相应于环形之序列 $\{C_q\}$ 的. 再作两个环形序列 $\{C'_q\}$, $\{C''_q\}$ 使 $C_q\subset C'_q\subset C''_q$,且使 $p\leqslant q-N_0$ 时 a_pu_q 之谱含于 C'_q 中,取 $\varphi_0\in C_0^\infty(C''_0)$ 而在 C'_0 上 $\varphi_0\equiv 1$. 令 $\varphi(\xi)=h(\xi)\varphi_0(\xi)$,则当 $\xi\in C'_q$ 时

$$h(\xi)=2^{mq}\varphi(2^{-q}\xi).$$

另一方面,因 $\varphi\in C_0^\infty(C''_0)$,故其逆 Fourier 变换 $\check{\varphi}(x)\in\mathscr{S}$,而且存在正整数 M 使

$$\|(1+|x|)^\rho\check{\varphi}(x)\|_{L^1}\leqslant C\|h(\xi)\|_{C^M(S^{n-1})},$$

注意到 $\varphi^{(\alpha)}(\xi)$ 的逆 Fourier 变换是 $(-ix)^\alpha\check{\varphi}(x)$ 即有

$$R'u=\sum_q\sum_{p\leqslant q-N_0}2^{mq}\Big(\varphi(2^{-q}D)a_p-\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}2^{-|\alpha|q}D^\alpha a_p\varphi^{(\alpha)}(2^{-q}D)\Big)u_q$$
$$=\sum_q\sum_{p\leqslant q-N_0}2^{mq}\int\check{\varphi}(t)\Big[a_p(x-2^{-q}t)$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha a_p}{\partial x^\alpha}2^{-|\alpha|q}(-t)^\alpha\Big]u_q(x-2^{-q}t)\,dt$$
$$=\sum_q f_q.$$

注意到 a_pu_q 的谱含于 C'_q 中,所以 $\mathrm{supp}\,\hat{f}_q\subset C'_q$,而且

$$\|f_q\|_{L^2}\leqslant C2^{mq}\int\Big|\sum_{p\leqslant q-N_0}\check{\varphi}(t)\Big[a_p(x-2^{-q}t)$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha a_p}{\partial x^\alpha}2^{-|\alpha|q}(-t)^\alpha\Big]\Big|dt\cdot\|u_q\|_{L^2}$$
$$\leqslant C2^{mq}\Big|\sum_{p\leqslant q-N_0}a_p\Big|_{C^\rho}2^{-\rho q}\|t^\rho\check{\varphi}(t)\|_{L^1}\cdot\|u_q\|_{L^2}$$
$$\leqslant C2^{(m-\rho)q}|a_p|_{C^\rho}\|u_q\|_{L^2}\|h\|_{C^M(S^{n-1})}.$$

当 $u\in H^s$ 时,$\|u_q\|_{L^2}\leqslant c_q2^{-qs}$,而且 $\{c_q\}\in l^2$,$\sum c_q^2\leqslant C\|u\|_{H^s}$,即知 $\sum f_q\in H^{s-m+\rho}$,且

$$\Big\|\sum f_q\Big\|_{H^{s-m+\rho}}\leqslant C|a|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}.$$

当 $u\in C^\alpha$ 时证法大体相同,但要估计 $\|f_q\|_{L^\infty}$,现在略去. 于

是定理证毕.

现在我们可以讨论 $\mathrm{Op}(l_\rho^m)$ 中的算子演算了.

定理 2.3.10 1) 设 $l_j(x,\xi)\in l_\rho^{m_j}$，$j=1,2$. 令

$$l(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha l_1\cdot D_x^\alpha l_2,\tag{2.3.13}$$

则 $T_{l_1}\circ T_{l_2}=T_l+R$，$R\in\mathrm{Op}(S^{m-\rho})$，$m=m_1+m_2$.

2) 设 $l(x,\xi)\in l_\rho^m$，令

$$l^*(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\bar{l}(x,\xi),\tag{2.3.14}$$

则 $T_l: H^s\to H^{s-m}$ 之伴算子 $T_l^*=T_{l^*}+R$，$R\in\mathrm{Op}(S^{m-\rho})$.

证 1) 我们不妨设 $l_1(x,\xi)=a(x)h(\xi)$，$l_2(x,\xi)=b(x)k(\xi)$，于是有

$$T_{l_1}\circ T_{l_2}=T_a\circ(h(D)s(D))\circ T_b\circ(k(D)s(D)).$$

由定理 2.3.9，当 $u\in H^s$ 时，

$$T_{l_1}\circ T_{l_2}u=T_a\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}T_{D^\alpha b}\circ h^\alpha(D)s(D)k(D)s(D)\Big)u$$
$$+T_aR(k(D)s(D)u).$$

而且

$$T_aR\circ k(D)s(D): H^s\to H^{s-m+\rho},$$

其算子范数$\leqslant C|a|_\rho|b|_\rho\|h\|_{C^M}\|k\|_{C^M}$.

对上式之第一项应用仿乘积之运算(定理 2.3.6,1))，有

$$T_aT_{D^\alpha b}h^\alpha(D)k(D)s^2(D)$$
$$=T_{aD^\alpha b}h^\alpha(D)k(D)s^2(D)+R\circ h^\alpha(D)k(D)s^2(D),$$

这里 $R: H^s\to H^{s+\rho-|\alpha|}$ 之算子范数$\leqslant C|a|_\rho|D^\alpha b|_{\rho-|\alpha|}$，所以

$$R\circ h^\alpha(D)k(D)s^2(D): H^s\to H^{s+\rho-m},$$

其算子范数$\leqslant C|a|_\rho|b|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}\|k\|_{C^M(S^{n-1})}$.

最后，现在

$$l(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}a(x)D^\alpha b(x)\cdot h^\alpha(\xi)k(\xi),$$

所以

$$T_l=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}T_{aD^\alpha b}\circ h^\alpha(D)k(D)s^2(D)+R'.$$

R'是指在定理 2.3.9 中将 $s(D)$ 换成 $s^2(D)$ 后 T_l 之余项，但其性质不变.

综合以上即知

$$T_{l_1}\circ T_{l_2}=T_l+R,$$

R 是$(\rho-m)$-正则化算子. $u\in C^\alpha$ 的情况类似，而 1)得证.

2) 仍设 $l(x,\xi)=a(x)h(\xi)$，于是对任意 $u,v\in C_0^\infty$，有

$$(T_l^*u,v)=(u,T_lv)=(u,T_ah(D)s(D)v)$$
$$=(T_a^*u,h(D)s(D)v)$$
$$=(T_{\bar a}u,h(D)s(D)v)+(Ru,h(D)s(D)v),\tag{2.3.15}$$

其中

$$|(Ru,h(D)s(D)v)|$$
$$\leqslant C\|Ru\|_{H^{s+\rho}}\|h(D)s(D)v\|_{H^{-s-\rho}}$$
$$\leqslant C|a|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s-\rho+m}},$$

又

$$(T_{\bar a}u,h(D)s(D)v)=(\bar h(D)s(D)T_{\bar a}u,v)$$
$$=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}(T_{D^\alpha\bar a}\bar h^{(\alpha)}(D)s(D)u,v)+(R'u,v),\tag{2.3.16}$$

而且

$$|(R'u,v)|\leqslant C|a|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s-\rho+m}}.$$

以(2.3.16)代入(2.3.15)，并且注意到 T_{l^*} 之定义(2.3.12)，即有

$$((T_l^*-T_{l^*})u,v)=(Ru,v),$$

而且 $R: H^s\to H^{s-m+\rho}$有界，其算子范数$\leqslant C|a|_\rho\|h\|_{C^M(S^{n-1})}$.

当 $l(x,\xi)=\sum_\nu a_\nu(x)h_\nu(\xi)$ 时，有

$$((T_l^*-T_{l^*})u,v)=(\sum_\nu R_\nu u,v),$$
$$\|R_\nu\|\leqslant C|a_\nu|_\rho\|h_\nu\|_{C^M(S^{n-1})}.$$

因为$|a_\nu|_\rho$急减，$\| h_\nu \|_{C^M(S^{n-1})}$缓增，故$\sum_\nu R_\nu$仍收敛于一个$(\rho-m)$-正则化算子.

由于C_0^∞在H^s与H^{-s+m}中稠密，所以上面的结论对于$u\in H^s$，$v\in H^{-s+m}$也成立. 2)得证.

至此，定理证毕.

我们也可以应用非光滑 PsDO 来讨论 ParaDO. 事实上，若$l(x,\xi)\in l_\rho^m$，可以定义

$$l(x,\mathrm{D})u = (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} l(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因为象征$l(x,\xi)$对x的光滑性只是C^ρ类，所以经典 PsDO 理论的许多结果，例如渐近展开在这里都不适用. 但是我们有

定理 2.3.11 *设$l\in l_\rho^m$，且$\rho>m$，则对一切$s>m-\rho$，$l(x,\mathrm{D})-T_l$是映H^s到$H^{s'}$的有界线性算子，这里$s'<\min\{\rho,s+\rho-m\}$.*

证 不妨设$l(x,\xi)=a(x)h(\xi)$，$a(x)\in C^\rho$且有紧支集，$h(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$是$m$次正齐次的. 于是对$u\in H^s$，$v=h(\mathrm{D})u\in H^{s-m}$，而$T_l u = T_a\circ h(\mathrm{D})u = T_a v$，

$$\begin{aligned}\| v\|_{H^{s-m}}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^{s-m}|\hat{v}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\ &= \int (1+|\xi|^2)^{s-m}|h(\xi)\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\ &= \int (1+|\xi|^2)^{s-m}|\xi|^{2m}|h(\xi/|\xi|)\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\ &\leqslant C^2\| h\|_{C^0(S^{n-1})}\| u\|_{H^s}^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}T_l u - l(x,\mathrm{D})u &= T_a v - a(x)(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}h(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &= T_a v - \sum_{p,q} a_p v_q = T_v a + R(a,v).\end{aligned}$$

这里

$$R(a,v) = \sum_{|p-q|<N_0} a_p v_q = \sum_{j=-N_0+1}^{N_0-1} R_j(a,v)$$

$$= \sum_j\sum_q a_{q-j}v_q = \sum_j\sum_q f_{j,q}.$$

容易看到 supp $\hat{f}_{j,q}\subset B(0,C2^q)$，而且

$$\begin{aligned}\| f_{j,q}\|_{L^2} &\leqslant \| a_{q-j}\|_{L^\infty}\| v_q\|_{L^2}\\ &\leqslant C|a|_\rho 2^{-\rho(q-j)}\| v\|_{H^{s-m}}2^{-q(s-m)}c_{qj}\\ &\leqslant C|a|_\rho\| h\|_{C^0(S^{n-1})}\| u\|_{H^s}2^{-q(s-m+\rho)}c_{qj},\end{aligned}$$

这里$\{c_{qj}\}\in l^2$(j固定). 对j由$-N_0+1$到N_0-1求和，即知当$s+\rho-m>0$时，$R(a,v)\in H^{s-m+\rho}$，而且

$$\| R\|_{H^{s-m+\rho}}\leqslant C|a|_\rho\| h\|_{C^0(S^{n-1})}\| u\|_{H^s}.$$

对于$T_v a$，则有

$$T_v a = \sum_q S_q(v)a_q = \sum_q f_q'.$$

这里 supp $\hat{f}_q'\subset C_q'$，而且

$$\begin{aligned}\| f_q'\|_{L^2} &\leqslant \| a_q\|_{L^\infty}\| S_q(v)\|_{L^2}\\ &\leqslant C|a|_\rho\| v\|_{H^{s-m}}2^{-q\rho}\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0}2^{-(s-m)p}c_p,\end{aligned}$$

$\{c_p\}\in l^2$. 若$s-m>0$，则$\sum_{p=-1}^{q-N_0}2^{-(s-m)p}\leqslant C$. 从而对任意$\varepsilon>0$有$T_v a\in H^{\rho-\varepsilon}$；若$s-m<0$，则$\sum_{p=-1}^{q-N_0}2^{-(s-m)p}c_p\leqslant C2^{-q(s-m)}$. 因此对任意$\varepsilon>0$，$T_v a\in H^{s-m+\rho-\varepsilon}$. 若$s-m=0$，则$f_q'=V_{q-N_0}a_q$，而

$$\hat{V}_{q-N_0}(\xi) = \psi(2^{-q+N_0}\xi)\hat{v}(\xi).$$

若$\check{\psi}(x)$是$\psi(\xi)$的逆 Fourier 变换，则$\check{\psi}(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. 而且

$$V_{q-N_0}(x) = v * 2^{n(q-N_0)}\check{\psi}(2^{q-N_0}x),$$

由 Hausdorff-Young 不等式，

$$\begin{aligned}\| f_q'\|_{L^2} &\leqslant \| a_q\|_{L^\infty}\| V_{q-N_0}\|_{L^2}\\ &\leqslant 2^{-\rho q}|a|_\rho\|\check{\psi}\|_{L^1}\| v\|_{L^2}\\ &\leqslant C2^{-q\varepsilon}2^{-\rho(q-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

故对任意$\varepsilon>0$有$T_v a\in H^{\rho-\varepsilon}$. 定理证毕.

推论 2.3.12 *1) 若$l\in l_\rho^m$，则$T_l - l(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$，从而对任意$s,s'$，$T_l-l(x,\mathrm{D})$: $H^s\to H^{s'}$，对任意σ,σ'，$T_l-l(x,\mathrm{D})$: $C^\sigma\to C^{\sigma'}$均为有界的.*

2）若 $\rho>m$，则 $T_l-l(x,D): L^2\to L^2$ 是有界的.

3）若 $\rho=m$，则 $T_l-l(x,D): H^\epsilon\to L^2$ 是有界的，这里 $\epsilon>0$ 是任意的.

推论 2.3.13 设 $l\in l^m_\rho$，$u\in H^s_{comp}$，$U\subset\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 是一个开锥形集.

1）若在 U 上 $l(x,\xi)=0$，则 T_lu 在 U 中微局部地属于 $H^{s-m+\rho}$，即 $T_lu\in H^{s-m+\rho}(U)$.

2）若 $u\in H^{s'}(U)$，则 $T_lu\in H^t(U)$，$t=\min\{s+\rho-m, s'-m\}$.

证 设 $k(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash 0))$ 对 ξ 是零次正齐次的，对 x 有紧支集，而且 $\operatorname{supp} k(x,\xi)\subset U$. 现在看 $k(x,D)T_lu$ 的正则性. 事实上，由推论 2.3.12 之 1)，

$$k(x,D)T_lu=T_k\circ T_lu+Ru,\quad R\in \operatorname{Op}(S^{-\infty}),$$

$$T_k\circ T_lu=\sum_{|\alpha|\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}T_{\partial_\xi^\alpha k\cdot D_x^\alpha l}u+R'u$$
$$=R'u.$$

这是因为 $\operatorname{supp}k\cap\operatorname{supp}l=\varnothing$，故 $\partial_\xi^\alpha k\cdot D_x^\alpha l=0$. $R'\in\operatorname{Op}(S^{\rho-m})$. 所以 $k(x,D)T_lu=Ru+R'u\in H^{s-m+\rho}$，而 $T_lu\in H^{s-m+\rho}(U)$，从而 1) 得证.

为证 2)仍用上述的 $k(x,\xi)$，并作 $k_1(x,\xi), k_2(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash 0))$，且对 ξ 为零次正齐次，对 x 有紧支集，而且 $k_1+k_2=1$，$\operatorname{supp}k_1\subset U$，且在 $\operatorname{supp}k(x,\xi)$ 上 $k_1=1$. 于是 $u=(k_1+k_2)u$，在 $\operatorname{supp}k$ 上 $k_2=0$，于是

$$\begin{aligned}k(x,D)T_lu&=T_k\circ T_lk_1(x,D)u+T_k\circ T_lk_2(x,D)u+R_1u\\&=T_k\circ T_lk_1(x,D)u+T_k\circ T_l\circ T_{k_2}u\\&\quad+R_2u+R_1u,\end{aligned}$$

这里 $R_1,R_2\in\operatorname{Op}(S^{-\infty})$. 和前面一样可证 $T_l\circ T_{k_2}$ 是 $(\rho-m)$-正则化算子，所以 $T_k\circ T_l\circ T_{k_2}u\in H^{s-m+\rho}$. 另一方面，$k_1(x,D)u\in H^{s'}$，因此，$T_k\circ T_lk_1(x,D)u\in H^{s'-m}$. 这样即知 $k(x,D)T_lu\in H^t$，从而 $T_lu\in H^t(U)$. 推论证毕.

以上，我们比较了 T_l 与 $l(x,D)$. 但实际上 T_l 本身也是一个 PsDO，即有

定理 2.3.14 若 $l\in l^m_\rho$，$\rho>0$ 非整数，则 T_l 是 $\operatorname{Op}(S^m_{1,1})$ 型 PsDO，其象征为

$$\sigma(T_l)=\sum_q S_q(l(x,\xi))\varphi(2^{-q}\xi). \tag{2.3.17}$$

证 注意到

$$T_lu=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sigma(T_l)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

我们只需验证 $\sigma(T_l)\in S^m_{1,1}$ 即可. 为此不妨仍用球面调和展开 (2.3.11)而设 $l(x,\xi)=a(x)h(\xi)$，于是

$$\sigma(T_l)=\sum_q S_q(a)h(\xi)\varphi(2^{-q}\xi).$$

它显然是 $C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash 0))$ 函数，而且其各项对 ξ 有紧支集于 C_q 内.

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(T_l)=\sum_q\partial_x^\beta S_q(a)\cdot\partial_\xi^\alpha(h(\xi)\varphi(2^{-q}\xi)).$$

由于 $a\in C^\rho\subset L^\infty$，故有

$$\|\partial_x^\beta S_q(a)(x)\|_{L^\infty}\leqslant C2^{q|\beta|}\|a\|_{L^\infty}.$$

注意到在 C_q 上，$|\xi|\sim 2^q$，上式可用 $\leqslant C(1+|\xi|)^{|\beta|}$ 来估计，同样

$$\begin{aligned}&|\partial_\xi^\alpha(h(\xi)\varphi(2^{-q}\xi))|\\&=\Big|\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}h^{(\alpha_1)}(\xi)2^{-q|\alpha_2|}\varphi^{(\alpha_2)}(2^{-q}\xi)\Big|\\&=\Big|\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}h^{(\alpha_1)}(\xi/|\xi|)|\xi|^{m-|\alpha_1|}2^{-q|\alpha_2|}\varphi^{(\alpha_2)}(2^{-q}\xi)\Big|\\&\leqslant C\|h\|_{C^M(S^{n-1})}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\end{aligned}$$

合并起来即得

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(T_l)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\beta|}.$$

证毕.

但是 $\operatorname{Op}(S^m_{1,1})$ 类是 PsDO 中的一个“坏”类. E. M. Stein 证明过它是 $H^s\to H^s(s>0)$ 的有界算子，且其范数随 $s\to 0$ 而趋向 ∞. 但一般说来，它不是 L^2(即 H^0)$\to L^2$ 的有界算子，而且可以找到反

例. 研究这一类 PsDO 是很有意义的问题，这方面的结果可以参看 Hörmander [Hö6].

2.3.3 一般开集上的仿微分算子

现在可以讨论在开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的仿微分算子. 在前面我们总假设了象征 $l(x,\xi)$ 对 x 具有紧支集. 这个限制现在也将放松.

定义 2.3.15 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一开集，m,ρ 是实数，$\rho>0$ 非整数. 定义 Σ_ρ^m 是定义在 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 上的下述形状函数的空间：

$$l(x,\xi)=\sum_{k=0}^{[\rho]} l_{m-k}(x,\xi). \tag{2.3.18}$$

$l_{m-k}(x,\xi)$ 对 ξ 属于 $C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 且为 $m-k$ 次正齐次函数. 对一切 α，$D_\xi^\alpha l_{m-k}(x,\xi)$ 对 x 均属 $C_{loc}^{\rho-k}$.

又定义 Σ_ρ^m 中的运算：若 $l_j(x,\xi)\in\Sigma_\rho^{m_j}$，$j=1,2$，

$$l_1\# l_2=\sum_{|\alpha|+k_1+k_2\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha l^1_{m_1-k_1}D_x^\alpha l^2_{m_2-k_2}, \tag{2.3.19}$$

$$l^*=\sum_{|\alpha|+k\leqslant[\rho]}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{l}_{m-k}. \tag{2.3.20}$$

定义 2.3.16 设 $L:\mathscr{D}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$ 是一适当支算子，m,ρ 为实数，$\rho>0$ 非整数. L 称为 Ω 上的 m 阶 ρ 类 ParaDO 是指，存在 $l(x,\xi)\in\Sigma_\rho^m$，使对任一紧集 $K\subset\subset\Omega$，以及在 K 附近恒等于 1 的 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数 χ，

$$L-\chi T_{\chi l}:\ H^s_{comp}(K)\to H^{s-m+\rho}_{comp}$$

对一切实数 s 均为有界算子. 这种算子之集合记作 $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$，$l(x,\xi)$ 称为 L 的象征.

若 $L-\chi T_{\chi l}:\ C_0^\sigma(K)\to C_0^{\sigma-m+\rho}$ 对一切实数 σ 均为有界算子，则记 $L\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$.

显然，$L:\ H^s_{loc}(\Omega)\to H^{s-m}_{loc}(\Omega)$对一切实数 s 均为有界的.

关于仿微分算子有以下的基本定理.

定理 2.3.17 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一开集，m,ρ 是实数，$\rho>0$ 非整数. 则

1) $L\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$（或 $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$）有唯一象征 $\sigma(L)\in\Sigma_\rho^m$，它定义了

象征映射

$$\sigma:\ L\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)\ (\text{或}\ \widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m))\to\Sigma_\rho^m$$

是一个满射，其核 $\ker\sigma$ 由映 $H^s_{loc}(\Omega)$ 到 $H^{s-m+\rho}_{loc}(\Omega)$ 的有界线性算子构成.

2) 若 $L_j\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m_j})$（或 $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^{m_j})$），$j=1,2$，则有

$$L_1\circ L_2\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})\ (\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})),$$
$$\sigma(L_1\circ L_2)=\sigma(L_1)\#\sigma(L_2).$$

3) 若 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$（或 $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$），则有

$$L^*\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)\ (\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)),$$
$$\sigma(L^*)=\sigma(L)^*.$$

4) 若 $L\in\mathrm{Op}(S^m_{1,0})$是一个适当支的 PsDO，其作为 PsDO 的象征

$$\sigma_\psi(L)\sim\sum_{k=0}^{\infty}l_{m-k}(x,\xi).$$

则对任意 $\rho>0$（非整数）均有 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$（或 $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$）且

$$\sigma(L)=\sum_{k=0}^{[\rho]}l_{m-k}(x,\xi).$$

证 因为对于 $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$与$\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$的证法是一样的，我们只讨论 $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$. 下面从 2)开始，而将 1)放在最后.

对 2)，只需证明 $\sigma(L_1)\#\sigma(L_2)=l_1\# l_2=\sigma(L_1\circ L_2)$即可. 任给紧集 $K\subset\subset\Omega$ 以及 $u\in H_0^s(K)$，取 $\chi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$而在 K 附近 $\chi(x)\equiv 1$. 于是

$$\begin{aligned}L_1\circ L_2&=L_1(\chi T_{\chi l_2}u+R_2u)\\&=\chi T_{\chi l_1}\circ\chi T_{\chi l_2}u+\chi T_{\chi l_1}\circ R_2u+R_1\circ\chi T_{\chi l_2}u+R_1\circ R_2u\\&=\chi T_{\chi l_1}\circ\chi T_{\chi l_2}u+Ru,\end{aligned}$$

这里 $R_j:\ H^s_{comp}(K)\to H^{s-m_j+\rho}_{comp}$，$j=1,2$，是 $\rho-m_j$ 正则化算子. 很容易证明

$$\chi T_{\chi l_1}\circ R_2,\ R_1\circ\chi T_{\chi l_1},\ R_1\circ R_2$$

都是映 $H^s_{comp}(K)\to H^{s-m_1-m_2+\rho}_{comp}$的正则化算子. 余下的只是要讨论

$\chi T_{\chi l_1}\circ\chi T_{\chi l_2}$. 因为 $\chi\in C_0^\infty\subset l_\infty^0$，所以作为一个 0 阶 PsDO，有 $\chi-T_\chi\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. 又由"#"的定义 $\chi\#\chi l_2=\chi^2 l_2$，所以

$$\chi T_{\chi l_1}\circ\chi T_{\chi l_2}u=\chi T_{\chi l_1}\circ T_{\chi^2 l_2}u+R_\infty u$$
$$=\chi T_{\chi l_1\#\chi^2 l_2}u+R_3 u,$$

这里 $R_3:H^s_{\mathrm{comp}}(K)\to H^{s-m_1-m_2+\rho}_{\mathrm{comp}}$. 现在证明 $\chi T_{\chi l_1\#\chi^2 l_2}=\chi T_{\chi(l_1\# l_2)}+R_4$，

$$R_4:\ H^s_{\mathrm{comp}}(K)\to H^{s-m_1-m_2+\rho}_{\mathrm{comp}}.$$

为此注意 $\chi(l_1\# l_2)=\chi l_1\# l_2$，作 $\chi_1\in C_0^\infty(\Omega)$使在 $\mathrm{supp}\,\chi$ 附近 $\chi_1\equiv 1$，则在 $\mathrm{supp}\,u$ 的一个邻域中 $\chi l_2-\chi_1 l_2=0$，从而由推论 2.3.13 之 1)，$T_{\chi l_2}-T_{\chi_1 l_2}:H^s_{\mathrm{comp}}(K)\to H^{s-m_2+\rho}_{\mathrm{comp}}$. 从而

$$T_{\chi l_1\#\chi l_2}=T_{\chi l_1\#\chi_1 l_2}+R=T_{\chi(l_1\# l_2)}+R',$$

R': $H^s_{\mathrm{comp}}(K)\to H^{s-m_1-m_2+\rho}_{\mathrm{comp}}$. 综合这些结果有

$$T_{\chi l_1\#\chi^2 l_2}\equiv T_{\chi l_1\#\chi_1\chi l_2}\equiv T_{\chi l_1\#\chi l_2}\equiv T_{\chi l_1\#\chi_1 l_2}$$
$$\equiv T_{\chi(l_1\# l_2)}\ \mathrm{mod}\ (\rho-m_1-m_2)\text{-正则化算子}.$$

2)于是得证.

3)的证明与 2)相似，不再重复.

对 4)，令 $l(x,\xi)=\sum_{k=0}^{[\rho]}l_{m-k}(x,\xi)$，仍用前面的记号

$$\chi T_{\chi l}u=\chi^2\sum_{k=0}^{[\rho]}l_{m-k}(x,\mathrm{D})u+\chi(T_{\chi l}-\chi l(x,\mathrm{D}))u.$$

但因 $l\in l_\infty^m$，所以 $\chi(T_{\chi l}-\chi l(x,\mathrm{D}))$是$\infty$正则化算子. 又因为当 $x\in K$ 时$(1-\chi^2)l(x,\xi)\equiv 0$，故对 $u\in H^s_{\mathrm{comp}}(K)$有$(1-\chi^2)l(x,\mathrm{D})u\in H^\infty$. 因此我们有

$$Lu-\chi T_{\chi l}u=Lu-l(x,\mathrm{D})u+Ru$$
$$=\sum_{k=[\rho]+1}^{\infty}l_{m-k}(x,\mathrm{D})u+Ru,$$

由于 R 是∞正则化算子，$\sum_{k=[\rho]+1}^{\infty}l_{m-k}(x,\mathrm{D})\in \mathrm{Op}(S_{1,0}^{m-[\rho]-1})$，所以

$$L-\chi T_{\chi l}:\ H^s_{\mathrm{comp}}(K)\to H^{s-m+([\rho]+1)}_{\mathrm{comp}}.$$

对 1)，先证明 σ 是满射，即任给 $l\in\Sigma_\rho^m$，必可找到 $L\in \mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$ 使 $\sigma(L)=l$. 为此，作 Ω 的一个局部有限的可数覆盖$\{\Omega_j\}$，这里

$\bar\Omega_j\subset\subset\Omega$，又作从属于它的 C^∞ 单位分解$\{\varphi_j\}$. 令 $\chi_j\in C_0^\infty(\Omega_j)$且在 $\mathrm{supp}\,\varphi_j$ 附近 $\chi_j\equiv 1$. 于是我们定义

$$Lu=\sum_j\chi_j T_{\chi_j l}(\varphi_j u).$$

这样定义的 L 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$到 $\mathscr{D}'(\Omega)$的线性算子. 我们要证明 L 即是所求的 $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$算子.

先证 L 是适当支的. 任给紧集 $K\subset\subset\Omega$，令 $K'=\bigcup_{j\in I_K}\mathrm{supp}\,\chi_j$，$I_K=\{j;\ K\cap\Omega_j\neq\varnothing\}$. 因为$\{\Omega_j\}$是局部有限的，所以 I_K 是有限集，而 K'仍是 Ω 的紧子集. 若 $\mathrm{supp}\,u\subset K$，则当 $j\notin I_K$ 时，$\varphi_j u=0$，从而

$$Lu=\sum_{j\in I_K}\chi_j T_{\chi_j l}(\varphi_j u).$$

于是 $\mathrm{supp}\,Lu\subset\bigcup_{j\in I_K}\mathrm{supp}\,\chi_j=K'$，即仍在 Ω 的一紧子集中. 另一方面，若 $\mathrm{supp}\,u\cap K'=\varnothing$，则对任一 $j\in I_K$，$\varphi_j u=0$，因此

$$Lu=\sum_{j\notin I_K}\chi_j T_{\chi_j l}(\varphi_j u),\quad \mathrm{supp}\,Lu\subset CK.$$

以上证明了 L 是适当支的. 下面再证 l 是 L 的一个象征.

任给紧集 $K\subset\subset\Omega$，作 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$使在 K 附近 $\chi\equiv 1$，若 $\mathrm{supp}\,u\subset K$，则

$$Lu-\chi T_{\chi l}u=\sum_{j\in I_K}\chi_j T_{\chi_j l}(\varphi_j u)-\chi T_{\chi l}u.$$

由 I_K 的定义，知当 $x\in K$ 时 $\sum_{j\in I_K}\varphi_j=1$，所以 $\chi T_{\chi l}u=\sum_{j\in I_K}\chi T_{\chi l}(\varphi_j u)$，代入上式即有

$$Lu-\chi T_{\chi l}u=\sum_{j\in I_K}[(\chi_j-\chi)T_{\chi_j l}-\chi T_{\chi l-\chi_j l}](\varphi_j u).$$

因为在 $\mathrm{supp}\,\varphi_j$ 上 $\chi l-\chi_j l=0$，所以后一项 $-\chi T_{\chi l-\chi_j l}(\varphi_j u)\in H^{s-m+\rho}_{\mathrm{comp}}$. 又由 $\chi_j-\chi\in C_0^\infty$，$(\chi_j-\chi)-T_{\chi_j-\chi}\in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$，因此

$$Lu-\chi T_{\chi l}u=\sum_{j\in I_K}T_{\chi_j-\chi}\circ T_{\chi_j l}(\varphi_j u)+Ru$$
$$=\sum_{j\in I_K}T_{(\chi_j-\chi)\chi_j l}(\varphi_j u)+Ru,$$

R: $H^s_{comp}(K)\to H^{s-m+\rho}_{comp}$. 再一次利用在 supp φ_j 上 $\chi_j-\chi=0$ 知第一项也是 $\rho-m$ 正则化算子. 因此 l 是 L 的象征.

至此，除了象征的唯一性以外，定理证毕.

为了证明象征的唯一性，即证明若 $L\in \mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$: $H^s\to H^{s-m+\rho}$，相应的象征必为 0. 而为了证明这件事，要对仿微分算子证明一个与椭圆 PsDO 必有拟逆相应的定理. 这个定理本身当然也是很有意义的，其证明也与 PsDO 的情况类似.

定理 2.3.18 设 $l\in\Sigma^m_\rho$，$k\in\Sigma^{m'}_\rho$ 且在 supp k 的一锥邻域上，$l(x,\xi)\neq 0$，这时必存在 $h,h'\in\Sigma^{m'-m}_\rho$ 使

$$l\# h = h'\# l = k. \tag{2.3.21}$$

证 令

$$l(x,\xi)=l_m(x,\xi)+\cdots+l_{m-[\rho]}(x,\xi).$$

则在 supp k 的一个锥邻域上，$l_m(x,\xi)\neq 0$. 于是令

$$h(x,\xi)=h_{m'-m}(x,\xi)+\cdots+h_{m'-m-[\rho]}(x,\xi),$$

并逐次来求 $h_{m'-m-k}$. 在 supp k 上，令 $h_{m'-m}(x,\xi)=k(x,\xi)/l_m(x,\xi)$，在 supp k 之外，补充定义 $h_{m'-m}=0$，则 $h_{m'-m}$ 已得. 这样下去，如果 $h_{m'-m}(x,\xi),\cdots,h_{m'-m-j_0+1}(x,\xi)$ 都已得出，而且是 ξ 的 $m'-m, m'-m-1,\cdots,m'-m-j_0+1$ 次正齐次函数，令

$$l_m h_{m'-m-j_0} = k_{m'-j_0} - \sum_{\substack{|\alpha|+j_1+j_2=j_0\\ j_2<j_0}} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi l_{m-j_1}\cdot D^\alpha_x h_{m'-m-j_2},$$

易见可以在 supp k 上求出 $h_{m'-m-j_0}$ 为 ξ 的 $m'-j_0$ 次正齐次函数. 然后在 supp k 之外补充定义 $h_{m'-m-j_0}$ 为 0，即适合所求.

$h'(x,\xi)$ 的作法类似.

定理 2.3.19 设 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$，$l=l_m+\cdots+l_{m-[\rho]}$ 是它的一个象征，若有 $s\in\mathbf{R}$ 和 $\varepsilon>0$ 使 L: $H^s\to H^{s-m+\varepsilon}$ 为有界算子，则 $l_m(x,\xi)=0$.

象征的唯一性可以利用这个定理依次证明 $l_m=l_{m-1}=\cdots=l_{m-[\rho]}=0$ 而得.

证 我们用反证法，并设在某点 (x_0,ξ_0) 的一个锥邻域中 $l_m(x,\xi)\neq 0$. 于是可以作一个 0 阶 PsDO K，使它的主象征 $k_0(x_0,\xi_0)\neq 0$，而且 supp $\sigma_\psi(K)\subset\{(x,\xi);\ l_m(x,\xi)\neq 0\}$，由定理 2.3.18，必有 $h\in\Sigma^{-m}_\rho$，使 $l\# h=k_0+\cdots+k_{-[\rho]}$. 而由定理 2.3.17 之 1) 知，有 $H\in\mathrm{Op}(\Sigma^{-m}_\rho)$ 使得

$$K=L\circ H+R,\quad R\in\mathrm{Op}(S^{-\rho}).$$

于是 K: $H^{s-m}\to H^{s-m+\varepsilon}$. 但 0 阶 PsDO 当主象征微局部地不为 0 时不可能映 H^{s-m} 到 $H^{s-m+\varepsilon}$. 这就是矛盾.

下面我们把有关算子演算的一些结果归纳为

推论 2.3.20 1) 对 $d>0$，$\mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)\subset\mathrm{Op}(\Sigma^{m+d}_{\rho+d})$.

2) 对 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$，$\rho>1$，若主象征 $\sigma_m(L)=0$，则 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma^{m-1}_{\rho-1})$.

3) 对 $L_j\in\mathrm{Op}(\Sigma^{m_j}_\rho)$，$j=1,2$，$\rho>1$，则其交换子

$$[L_1,L_2]\in\mathrm{Op}(\Sigma^{m_1+m_2-1}_{\rho-1}),$$

$$\sigma_{m_1+m_2-1}([L_1,L_2])=\frac{1}{i}\{\sigma_{m_1}(L_1),\sigma_{m_2}(L_2)\}.$$

若 $0<\rho\leqslant 1$，则 $[L_1,L_2]\in\mathrm{Op}(\Sigma^{m_1+m_2-1}_\rho)$，但其象征为 0.

4) 设 $U\subset\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 是一个开锥形集，若 $L\in\mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$，$u\in H^s_{loc}(\Omega)\cap H^t(U)$，则 $Lu\in H^r(U)$，$r=\min\{t-m,s-m+\rho\}$. 若 $\sigma(L)=0$ 于 U 上，则 $Lu\in H^{s-m+\rho}(U)$.

这一事实还可以表述如下：若 0 阶 PsDO M 的象征在 U 的某个紧锥邻域外为 0，则必可找到同样类型的 PsDO M_1 以及 $\psi\in C^\infty_0(\Omega)$ 使

$$\|MLu\|_r\leqslant C\{\|M_1u\|_t+\|\psi u\|_s\}.$$

在下面的讨论中，一族 ParaDO $\{L_\lambda\}$ 的有界性是有用的概念. 我们给出其定义如下：

定义 2.3.21 算子族 $\{L_\lambda\}\subset\mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$ 称为有界的，是指

1) 对于 λ 为一致的适当支：即对任一紧集 $K\subset\subset\Omega$，必有另一紧集 $K_1\subset\subset\Omega$，使对一切 λ 有 supp $u\subset K\Rightarrow$ supp $L_\lambda u\subset K_1$，以及 supp $u\cap K_1=\varnothing\Rightarrow$ supp $L_1 u\cap K=\varnothing$.

2) 象征族对 λ 一致有界，即若 $l_\lambda=\sum_{j=0}^{[\rho]} l_{\lambda,m-j}$ 是 L_λ 的象征，则对任意 $\alpha\in\mathbf{N}^n$，以及 $|\xi|=1$，$D_\xi^\alpha l_{\lambda,m-j}$ 对一切 λ 属于 $C_{loc}^{\rho-j}(\Omega\times S^{n-1})$ 的同一个有界集 M_α.

3) 对任一紧集 $K\subset\subset\Omega$ 以及在 K 的某邻域中为 1 的 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$，$L_\lambda-\chi T_{\chi l_\lambda}$ 作为 $H^s_{comp}(K)\to H^{s-m+\rho}_{comp}$ 的算子，其范数对 λ 有界.

例如，$\{\chi(1-\lambda\Delta)^{-1}\chi\}$ 当 $\lambda>0$ 时，在 $Op(\Sigma_\rho^0)$ 中有界，$\{\lambda\chi(1-\lambda\Delta)^{-1}\chi\}$，$\lambda>0$ 在 $Op(\Sigma_\rho^{-2})$ 中有界.

2.4 非线性偏微分方程的仿线性化

一般的非线性 C^∞ 函数 F 所成的方程

$$F(x,u_1,\cdots,u_N)=0,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

可以看做是 0 阶非线性偏微分方程. 当我们从这个最简单的情况开始时，首先遇到的问题是：其左方，作为 x 的函数 $u_1,\cdots,u_N$ 的复合函数，应如何定义？2.2 节中的定理 2.2.9 讨论了 F 中不显含 x（这并不是本质的限制），而且 $u\in H^s\cap L^\infty$ 的情况. 证明过程中用到连续的 L-P 分解，而将 $F(u)$ 写成

$$F(u)=F(u_1)+a(x,D)u. \tag{2.2.21}$$

这里，u_1 即是 L-P 分解中的 u_{-1}，而 $a(x,D)$ 是 $S^0_{1,1}$ 型的拟微分算子. 我们不妨称它为**第一线性化公式**，但因 $a(x,D)$ 属于一坏类，使用不甚方便，所以我们再设法用一个仿微分算子去代替它而得到另一更为方便的仿线性化公式.

例如看 $F(u)=u^2=u\cdot u$，如果 $u\in C^\rho$，$\rho>0$ 非整数，则用仿积去代替乘积：

$$u\cdot u=T_uu+T_uu+Ru=T_{2u}u+Ru.$$

R 是一个 ρ-正则化算子. 较为一般地有，若 $F(u)$ 是 u 的多项式，而 $u\in C^\rho$，$\rho>0$ 非整数，用数学归纳法易证

$$F(u)=T_{F'(u)}u+Ru,$$

$Ru\in C^{2\rho}$. 若 $u\in H^s$，$s>n/2$，则由嵌入定理也可知上式成立，而

$Ru\in H^{2s-n/2}$. 一般地我们要证明

定理 2.4.1（仿线性化定理或第二线性化公式） 设 $F(x,u_1,\cdots,u_N)$ 是 C^∞ 函数而且 $F(x,0)=0$，则当 $u_j(x)\in H^s$，$s>n/2$ 且有紧支集（或 $u_j(x)\in C^\rho$，$\rho>0$ 非整数，且有紧支集）时

$$F(x,u_1,\cdots,u_N)=\sum_{j=1}^N T_{\partial F/\partial u_j}u_j+R, \tag{2.4.1}$$

这里 $R\in H^{2s-n/2}$（或 $R\in C^{2\rho}$）.

(2.4.1)称为**仿线性化公式**.

证 令 $u_{N+1}(x)=x_1$，$\cdots$，$u_{N+n}(x)=x_n$，则 $F(x,u)$ 可以写成 $F(u)$，而 u 是一个 $(N+n)$-向量. 但 $x_1,\cdots,x_n\notin H^s$. 由于我们在定理中假设了 $u_1,\cdots,u_N$ 有紧支集，故不妨设有某个紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$ 使在 K 外 $u_1,\cdots,u_N=0$. 现在作函数 $v_i(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，$i=1,2,\cdots,n$ 使当 $x\in K$ 时，$v_i(x)\equiv x_i$，有 $v_i(x)\in H^s$，$s>n/2$（或 $v_i(x)\in C^\rho$，$\rho>0$ 为非整数），而原来的 $F(x,u)\equiv F(v_1,\cdots,v_n,u_1,\cdots,u_N)$. 因此下面可设 F 不显含 x 而为 $F(u)$，且 $F(0)=0$. 又为简单计不妨设 u 是一维向量，且 $u(x)\in C^\rho(\rho>0$ 为非整数). $u\in H^s$ 的证明与此类似.

作 $u(x)$ 的 L-P 分解

$$u(x)=\sum_{p=-1}^\infty u_p(x),$$

并记

$$\Sigma_q u=\sum_{p=-1}^q u_p(x),$$

显然 $\Sigma_q u\in C^\infty$. 而因为 $u\in C^\rho$，故 $\|u_p\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p\rho}$，所以上述级数一致收敛于 $u(x)$，而有

$$F(u)=\sum_{p=-1}^\infty(F(\Sigma_p u)-F(\Sigma_{p-1}u)) \tag{2.4.2}$$

这里假设 $\Sigma_{-2}u\equiv0$. 但由中值定理，

$$\begin{aligned}F(\Sigma_p u)-F(\Sigma_{p-1}u)&=F(\Sigma_{p-1}u+u_p)-F(\Sigma_{p-1}u)\\&=u_p\int_0^1F'(\Sigma_{p-1}u+tu_p)dt\\&=m_pu_p,\quad p=0,1,\cdots.\end{aligned}$$

代入(2.4.2)并用 Fourier 变换，有

$$F(u)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sum_{p=-1}^{\infty}m_p(x)\varphi_p(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$=L(x,D)u.$$

但这就是(2.2.21)式，$L(x,D)\in Op(S^0_{1,1})$，其象征为

$$\sigma(L)=\sum_{p=-1}^{\infty}m_p(x)\varphi_p(\xi).$$

现在把 $T_{F'(u)}$ 也化为 PsDO. 应用仿积的定义 $\widetilde{T}_a$，即(2.3.3)式，有

$$T_{F'(u)}u=\sum_{p=-1}^{\infty}S_p(F'(u))u_p, \tag{2.4.3}$$

$$S_p(F'(u))=\sum_{-1\leqslant q\leqslant p-N_0-1}(F'(u))_q=\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u)).$$

代入(2.4.3)有

$$T_{F'(u)}u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sum_{p\geqslant N_0}(\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u))(x))\varphi_p(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

代入(2.4.1)即知 R 也是一个 PsDO，而其象征是

$$\sigma(R)=\sigma(L)-\sigma(T_{F'(u)})$$

$$=\sum_{p\geqslant N_0}(m_p(x)-\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u))(x))\varphi_p(\xi)$$

$$+\sum_{p<N_0}m_p(x)\varphi_p(\xi). \tag{2.4.4}$$

现在我们证明 $R\in Op(S^{-\rho}_{1,1})$. 实际上，第二项是一个 C^∞ 函数且对 ξ 有紧支集，所以属于 $S^{-\infty}$，以第一项象征作 PsDO，作用于 $u(x)$ 上，记之为

$$w(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sum_{p\geqslant N_0}(m_p(x)-\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u))(x))\varphi_p(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$=\sum_{p\geqslant N_0}v_p(x)u_p(x)=\sum_{p\geqslant N_0}w_p(x), \tag{2.4.5}$$

$$v_p(x)=m_p(x)-\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u))(x).$$

我们要用定理 2.1.7 的 4)来证明 $w(x)\in C^{2\rho}$，因为在那里并不要求分解式 $w(x)=\sum_{p\geqslant N_0}w_p(x)$ 中的各项之谱 $\hat{w}_p(\xi)$ 有紧支集于

一环形之中. 显然 $w_p(x)\in C^\infty$，因此为应用此定理仅需估计 $D_x^\alpha w_p(x)$即可((2.4.5)在 $\mathscr{S}'$ 中的收敛性在作完估计后自然得出)，而为此又要分别计算 $D_x^\alpha v_p$ 与 $D_x^\alpha u_p$.

先计算 $D_x^\alpha v_p$，为此我们对 $m_p(x)$进一步应用 Taylor 公式：

$$m_p(x)=\int_0^1F'(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)dt$$

$$=F'(\Sigma_{p-1}(u))+u_p\int_0^1F''(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)(1-t)dt,$$

而有

$$v_p(x)=(F'(\Sigma_{p-1}(u))-\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u)))$$

$$+u_p\int_0^1F''(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)(1-t)dt.$$

在计算 $D_x^\alpha v_p(x)$时先看第二项，注意到 $F''(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)$ 之变元的谱适合 $\mathrm{supp}\,(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)\hat{}\subset B(0,C2^p)$，故由 Bernstein 引理(引理 2.1.6)有

$$\|D_x^\alpha(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)\|_{L^\infty}\leqslant C2^{p|\alpha|},$$

令$|\alpha|=0$ 即知 $F''(\cdot)$中变元之值恒在紧集$|\cdot|\leqslant C$ 中，在其上 F'' 之各阶导数值有上界，从而经计算后

$$\|D_x^\alpha F''(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)\|\leqslant C_\alpha 2^{p|\alpha|}.$$

用链法则以及定理 2.1.7 中的 1)⇒2)即知

$$\|D_x^\alpha u_p\int_0^1F''(\Sigma_{p-1}(u)+tu_p)(1-t)dt\|_{L^\infty}\leqslant C2^{p(|\alpha|-\rho)}.$$

再看下面的估计，即要证明

$$\|D_x^\alpha(F'(\Sigma_{p-1}(u))-\Sigma_{p-N_0-1}(F'(u)))\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p(|\alpha|-\rho)}. \tag{2.4.6}$$

现在分两种情况考虑：首先是 $0\leqslant|\alpha|<\rho$，因为 $F'(f)\in C^\rho$，所以

$$D_x^\alpha(F'(\Sigma_{p-1}(u))-F'(u))$$

$$=\sum_{\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_q}[F^{(q+1)}(\Sigma_{p-1}(u))D_x^{\alpha_1}(\Sigma_{p-1}(u))\cdots D_x^{\alpha_q}(\Sigma_{p-1}(u))\cdots$$

$$-F^{(q+1)}(u)D_x^{\alpha_1}u\cdots D_x^{\alpha_q}u]. \tag{2.4.7}$$

再一次应用引理 2.1.7 经计算后可得

$$\begin{aligned}\| F^{(q+1)}(\Sigma_{p-1}(u)) - F^{(q+1)}(u) \|_{L^\infty} &\leqslant \max | F^{(q+2)} | \ \| \Sigma_{p-1} u - u \|_{L^\infty} \\ &\leqslant C_{q,p} \| u_{p+1} + \cdots \|_{L^\infty} \\ &\leqslant C_{q,p} \sum_{k=1}^{\infty} \| u_{p+k} \|_{L^\infty} \\ &\leqslant C_{q,p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(p+k)\rho} \leqslant C 2^{-p\rho} \quad (\text{注意 } \rho > 0).\end{aligned}$$

注意到

$$\| D_x^\alpha(\Sigma_{p-1}(u) - u) \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-\rho)},$$

$$\| F^{(q+1)}(\Sigma_{p-1}(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C,$$

$$\| F^{(q+1)}(u) \|_{L^\infty} \leqslant C,$$

$$\| D_x^{\alpha_i} \Sigma_{p-1}(u) \|_{L^\infty} \leqslant C,$$

$$\| D_x^{\alpha_i} u \|_{L^\infty} \leqslant C,$$

这里 C 均与 p 无关，代入(2.4.7)即知当 $|\alpha|<\rho$ 时，

$$\| D_x^\alpha(F'(\Sigma_{p-1}(u)) - F'(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-\rho)}. \quad (2.4.8)$$

另一方面，由于 $F'(u)\in C^\rho$，$D_x^\alpha F'(u) \in C^{\rho-|\alpha|}$，可知

$$\| D_x^\alpha F'(u) - \Sigma_{p-N_0-1}(F'(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-\rho)}. \quad (2.4.9)$$

综合(2.4.8)和(2.4.9)，并代入(2.4.7)即得当 $0\leqslant|\alpha|<\rho$ 时，(2.4.6)成立.

其次看 $|\alpha|\geqslant\rho$ 的情况. 由于 $F'(u)\in C^\rho$，所以我们一方面有

$$\| D^\alpha \Sigma_{p-N_0-1}(F'(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-\rho)},$$

另一方面又容易如同(2.4.7)那样来计算

$$D_x^\alpha F'(\Sigma_{p-1}(u)) = \sum F^{(q+1)}(\Sigma_{p-1} u) D_x^{\alpha_1}(\Sigma_{p-1}(u)) \cdots D_x^{\alpha_q}(\Sigma_{p-1}(u)),$$

以及

$$\sum_j (|\alpha_j| - \rho) \leqslant \sum_j |\alpha_j| - \rho = |\alpha| - \rho$$

而有

$$\| D_x^\alpha F'(\Sigma_{p-1}(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-\rho)}.$$

所以当 $|\alpha|\geqslant\rho$ 时，(2.4.6)也成立.

最后注意到 $D_x^\alpha w_p = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_\alpha^{\alpha_1} D_x^{\alpha_1} v_p D_x^{\alpha_2} u_p$，即知

$$\| D_x^\alpha w_p \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(|\alpha|-2\rho)},$$

因此 $w(x)\in C^{2\rho}$.

$u\in H^s$ 的情况证明类似，至此定理证毕.

我们时常要应用这个定理的局部形式和微局部形式：

定理 2.4.2 *设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一开集，$u_1,\cdots,u_N\in H^s_{loc}$，$s>n/2$（或 $\in C^\rho$，$\rho>0$ 非整数）为实值函数. $F(x,y)$，$x\in\mathbf{R}^n$，$y\in\mathbf{R}^N$ 是定义在 $(x_1,\cdots,x_n,u_1(x),\cdots,u_N(x))$ $(x\in\Omega)$ 附近的 C^∞ 函数，则有以 $\partial F/\partial u_j$ 为象征的 ParaDO A_j 使*

$$F(x,u(x)) - \sum_{j=1}^N A_j u_j \in H^{2s-n/2-\varepsilon}_{loc},$$

这里 $\varepsilon>0$ 是任意常数（或 $\in C^{2\rho}_{loc}$）.

事实上，设紧集 $K\subset\subset\Omega$，作 $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$ 使在 K 附近 $\chi\equiv1$，从而 $F(x,u)\equiv F(x,\chi u)$. 而 $A_j u_j - T_{\chi F'_u(x,\chi u)}\chi u_j \in H^{2s-n/2}$（或 $C^{2\rho}$）于 K 附近，再应用上之定理即得. 不过我们未设 $F(x,0)=0$，这是因为

$$\begin{aligned}F(x,y) &= F(x,y) - F(x,0) + F(x,0) \\ &= F_1(x,y) + F(x,0), \quad F(x,0) \in C^\infty,\end{aligned}$$

而 $F_1(x,0)=0$. 对 $F_1(x,y)$ 应用定理 2.1.6 即可.

定理 2.4.3 *对 u 和 F 的假设同上，若再令 $u_j\in H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$（或 $u_j\in C^{\rho'}_{(x_0,\xi_0)}$），则*

$$F(x,u) \in H^\gamma_{(x_0,\xi_0)}, \quad \gamma\leqslant s', \gamma < 2s - n/2$$

（或 $F(x,u)\in C^\sigma_{(x_0,\xi_0)}$，$\sigma=\min\{\rho',2\rho\}$）.

下面我们要将一般的非线性 PDE

$$F[u] \equiv F(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant m} = 0 \quad (2.4.10)$$

仿线性化. 这里 $F\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^N)$ 是一实值函数，$N=$ 适合 $|\beta|\leqslant m$ 的 ∂^β 之个数. 我们考虑(2.4.10)对 u 的某些导数为线性的情况，即

$$F[u]=\sum_{k_0<k\leqslant m}\Big(\sum_{|\alpha|=k}A_\alpha(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant p(k)}\partial^\alpha u\Big)$$
$$+A_{k_0}(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant k_0},\qquad(2.4.11)$$

这里 $p(k)<k$，而且规定：若 A_α 只含 x，则取 $p(k)=-\infty$. 又记

$$d=\max\left\{k_0,\frac{k+p(k)}{2}\right\}.\qquad(2.4.12)$$

若 F 是拟线性的，有 $k=m$，$p(m)=m-1$，$k_0=m-1$，从而 $d=m-1/2$. 若 F 是半线性的，则有 $k=m$，$p(m)=0$，$k_0=m-1$，从而 $d=m-1$. 若 F 仅对 u 是非线性的，则 $p(k)=-\infty$，$k_0=0$，从而 $d=0$，若 F 是线性的，则规定 $d=-\infty$. 如果 $A_\alpha\equiv 0$，则可得到 k_0 阶完全非线性 PDE. 总之(2.4.10)是很广泛的一类方程.

如果 $u\in C^\rho_{loc}$，$\rho>0$ 非整数，而且 $\rho>\max\{p(k),k_0\}$，则由定理 2.4.2，(2.4.11)中的 A_α,A_{k_0} 都是有意义的. 但(2.4.11)中还有乘积 $A_\alpha\cdot\partial^\alpha u$，由仿乘积的定理知它 mod $C^{\rho_1}_{loc}$（ρ_1 是适当的数）也是有意义的. 于是我们有

定理和定义 2.4.4 *设 $u\in C^\rho_{loc}(\Omega)$，$\rho>\max\{p(k),k_0\}$. 令*

$$P(x,\xi)=\sum_{|\beta|>2d-\rho}F_\beta(x,u,\cdots)(\mathrm{i}\xi)^\beta,\qquad(2.4.13)$$

$F_\beta=\partial F/\partial u_\beta$（这里用 u_β 记 $\partial^\beta u$），则 $P(x,\xi)\in\Sigma^m_{\rho+2m-2d}$，并称为 F 的象征. $|\beta|=m$ 的部分称为 F 的主象征，记作 $P_m(x,\xi)$.

证 首先注意到，因为 $\rho>\max\{k_0,p(k)\}$，

$$m\geqslant\max\{k_0,k\}\geqslant\max\{k_0,p(k)\}=\rho,$$

而且 $\rho+m\geqslant\max\{2k_0,p(k)+k\}=2d$，从而 $2d-\rho\leqslant m$. 这样(2.4.13)中确实含有 $|\beta|=m$ 的项，所以定义主象征为 $P(x,\xi)$ 中适合 $|\beta|=m$ 的项是有意义的.

现在证明 $P(x,\xi)\in\Sigma^m_{\rho+m-2d}$. $P(x,\xi)$ 中含两类项，其一是将 $A_\alpha\partial^\alpha u$ 的因子 $\partial^\alpha u$ 换为 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ 而得

$$A_\alpha(x,u(x),\cdots)(\mathrm{i}\xi)^\alpha,\quad |\alpha|>2d-\rho.\qquad(2.4.14)$$

因为 $A_\alpha(\cdot)$ 中的 $\partial^\beta u\in C^{\rho-p(k)}=C^{\rho-p(|\alpha|)}$（注意 $|\beta|\leqslant p(k)$，而 $|\alpha|=k$），所以这样的项对于 x 属于 $C^{\rho-p(|\alpha|)}_{loc}(\Omega)$，而对于 ξ 是 $|\alpha|$ 次正齐

性函数. 由定义，$\Sigma^m_{\rho_1}(\Omega)$ 应为 ξ 的 $m-k$ 次正齐性函数之和，所以(2.4.14)对应于 $m-k=|\alpha|$ 即 $k=m-|\alpha|$. 这一项对 x 应属于 C^{ρ_1-k}（定义 2.3.15），但现在(2.4.14)对 x 属于 $C^{\rho-p(|\alpha|)}$，所以

$$\rho_1-k=\rho_1+|\alpha|-m=\rho-p(|\alpha|),$$

从而

$$\rho_1=\rho+m-|\alpha|-p(|\alpha|)\geqslant\rho+m-2d.$$

所以这一类的项均属于 $\Sigma^m_{\rho+m-2d}$.

第二类的项是由 $A_\alpha(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant p(k)}\partial^\alpha u$ 对 A_α 内的 $\partial^\beta u$ 求导而得，即 $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta\partial^\alpha u$. 但 $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}\in C^{\rho-p(|\alpha|)}_{loc}$，$\partial^\alpha u\in C^{\rho-|\alpha|}$. 这里 $\rho-p(|\alpha|)>\rho-|\alpha|$，因此 $C^{\rho-p(|\alpha|)}_{loc}\subset C^{\rho-|\alpha|}_{loc}$，所以

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta\partial^\alpha u\qquad(2.4.15)$$

是 $C^{\rho-|\alpha|}_{loc}$ 中两个元素之积. $C^{\rho-|\alpha|}_{loc}$ 是一个代数，这是因为 $|\beta|\leqslant p(k)<p(|\alpha|)$，所以

$$\rho-|\alpha|\geqslant\rho-|\alpha|+|\beta|-p(|\alpha|)$$
$$\geqslant\rho+\beta-2d>0.$$

总之(2.4.15)对 x 属于 $C^{\rho-|\alpha|}_{loc}$，对 ξ 是 $|\beta|$ 次正齐次函数. 与上面的推理一样，它属于 Σ^m_σ，

$$\sigma=\rho+|\beta|-2d+m-|\beta|=\rho+m-2d>0.$$

合并起来即得 $P(x,\xi)\in\Sigma^m_{\rho+m-2d}(\Omega)$.

下面我们要作以 $P(x,\xi)$ 为象征的仿微分算子，而得到仿线性化的基本定理.

定理 2.4.5 *设 $u\in C^\rho_{loc}(\Omega)$ 是方程(2.4.11)的实解，$\rho>0$ 非整数，且 $\rho>\max\{k_0,p(k)\}$. 以 $P(x,\xi)$（(2.4.13)）为象征作 ParaDO $P\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma^m_{\rho+m-2d})$，若 $\rho>d$，必有 $Pu\in C^{2\rho-2d}_{loc}$.*

当 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 而 $s>n/2+\rho$，$\rho>d-n/4$ 时，有 $P\in\mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho+m-2d})$ 且 $Pu\in H^{s+\rho-2d}_{loc}(\Omega)$.

证 我们只讨论 $u\in C^\rho_{loc}(\Omega)$ 的情况，并且只考虑 F 为(2.4.11)的一项 $A_\alpha\partial^\alpha u$（$A_{k_0}$ 一项容易考虑，故略），并且分成几种情况.

1） $k\leqslant 2d-\rho$，则 $\rho-k\geqslant 2\rho-2d>0$．由于 $\partial^\alpha u\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho-k}(\Omega)\subset C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega)$，

$$A_\alpha(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant p(k)}\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho-p(k)}(\Omega)\subset C_{\mathrm{loc}}^{\rho-k}(\Omega)\subset C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega).$$

因为 $C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega)$ 是一个代数，故 $A_\alpha\partial^\alpha u\in C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega)$．

2） $k>2d-\rho$ 且 $\rho-k\leqslant 0$．令 R_α 是以 A_α 为象征的零阶 ParaDO 应有

$$A_\alpha\partial^\alpha u-R_\alpha\partial^\alpha u=v\in C_{\mathrm{loc}}^\sigma(\Omega),$$

这里 $\sigma=\rho-p(k)+\rho-k\geqslant 2\rho-2d>0$．于是以 $A_\alpha(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ 为象征的 ParaDO $P\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_{\rho-p(k)}^m)\subset\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_{\rho+m-2d}^m)$．

3） $k>2d-\rho$ 但 $\rho-k>0$．这时仍有 $A_\alpha\in C^{\rho-p(k)}$，$\partial^\alpha u\in C^{\rho-k}$，以它们为象征作 ParaDO R_α 与 S_α 则

$$A_\alpha\partial^\alpha u=R_\alpha\partial^\alpha u+S_\alpha A_\alpha u+w_1,\tag{2.4.16}$$

$w_1\in C_{\mathrm{loc}}^\sigma(\Omega)$，$\sigma=\rho-p(k)+\rho-k\geqslant 2\rho-2d$ $(2d\geqslant k+p(k))$．对上式的第二项，又用 $\partial A_\alpha/\partial u_\beta$ 为象征作 ParaDO $T_{\alpha\beta}$，由定理 2.4.2 有

$$A_\alpha u=\sum_{|\beta|\leqslant p(k)}T_{\alpha\beta}\partial^\beta u+w_2,\tag{2.4.17}$$

$w_2\in C_{\mathrm{loc}}^\sigma(\Omega)$，$\sigma=2(\rho-p(k))\geqslant 2\rho-2d$．以(2.4.17)代入(2.4.16)有

$$A_\alpha\partial^\alpha u=R_\alpha\partial^\alpha u+\sum_{|\beta|\leqslant p(k)}S_\alpha T_{\alpha\beta}\partial^\beta u+w_1+S_\alpha w_2.$$

因为 $S_\alpha,T_{\alpha\beta}$ 都是 0 阶 ParaDO，而 $\partial^\beta u\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho-|\beta|}(\Omega)$，所以 $S_\alpha T_{\alpha\beta}\partial^\beta u\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho-|\beta|}(\Omega)$．相应于 $|\beta|\leqslant 2d-\rho$ 的这一些项属于 $C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega)$，记为 w_3，有

$$\begin{aligned}A_\alpha\partial^\alpha u&=R_\alpha\partial^\alpha u+\sum_{|\beta|>2d-\rho}S_\alpha T_{\alpha\beta}\partial^\beta u+w_1+S_\alpha w_2+w_3\\&=R_\alpha\partial^\alpha u+\sum_{|\beta|>2d-\rho}S_\alpha T_{\alpha\beta}\partial^\beta u+w,\end{aligned}$$

其中 $w\in C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega)$．所以，用

$$A_\alpha(\mathrm{i}\xi)^\alpha+\sum_{|\beta|>2d-\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}\partial^\alpha u(\mathrm{i}\xi)^\beta$$

为象征作 ParaDO $P\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_{\rho+m-2d}^m)$（这个象征即是 $\sum_{|\beta|>2d-\rho}\frac{\partial F}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta$），有

$$A_\alpha\partial^\alpha u=Pu+w,\quad w\in C_{\mathrm{loc}}^{2\rho-2d}(\Omega).$$

定理证毕．

对于一般的非线性 PDE

$$F(x,u(x),\cdots,\partial^\beta u(x),\cdots)_{|\beta|\leqslant m}=0,\quad F\in C^\infty,\tag{2.4.18}$$

我们也有不如上一定理精确的

定理 2.4.6 *设 $u\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho+m}(\Omega)$，$\rho>0$ 为非整数，是方程(2.4.18)的实解(或 $u\in H_{\mathrm{loc}}^{s+m}(\Omega)$)，则存在以*

$$P(x,\xi)=\sum_{|\beta|\leqslant m}\frac{\partial F}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta\in\Sigma_\rho^m\tag{2.4.19}$$

为象征的 ParaDO $P\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$（或 $P\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$）使得 $Pu\in C_{\mathrm{loc}}^{2\rho}(\Omega)$（或 $H_{\mathrm{loc}}^{2s-n/2}(\Omega)$）．而(2.4.19)中 $|\beta|=m$ 的部分称为 P 的主象征：

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m}\frac{\partial F}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta.$$

上面将方程 $F(u)=0$ 化为仿微分方程 $Pu=R$（例如 $R\in C_{\mathrm{loc}}^{2\rho}(\Omega)$）的程序称为非线性 PDE 的仿线性化．至此，我们可以利用线性 PDE 的概念和技巧讨论非线性 PDE．它是本书的主要内容．下一节我们先略述一些最简单的应用．

2.5 对非线性偏微分方程的应用

本节中我们要讨论 ParaDO 理论的两个应用．第一是关于椭圆正则性问题．设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一开集，其上有一 m 阶非线性偏微分方程

$$F(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant m}=0,\tag{2.5.1}$$

F 是其变元的 C^∞ 函数．如果 $u\in C_{\mathrm{loc}}^\rho(\Omega)$ 是一个解，$\rho>m$ 为非整数(或 $u\in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$，$s>m+n/2$)，则 $F(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)\in C_{\mathrm{loc}}^{\rho-m}(\Omega)$(或 $H_{\mathrm{loc}}^{s-m}(\Omega)$)是 Ω 上的连续函数．

定义 2.5.1 对上述的 u，称

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m}\frac{\partial F}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta \qquad (2.5.2)$$

为(2.5.1)的特征多项式(即前述主象征). 若 $P_m(x_0,\xi_0)=0$，称 $(x_0,\xi_0)\in T^*\Omega\backslash 0$ 为其特征点，其集称为特征集，记作

$$\mathrm{Char}\,P=\{(x,\xi)\in\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0);\ P_m(x,\xi)=0\}.$$

若 $P_m(x_0,\xi_0)\neq 0$，称 F 为在 (x_0,ξ_0) 处为微局部椭圆的. 当 $\rho>m+2$ 时，称 P_m 的 Hamilton 向量场 H_{P_m} 之过特征点 (x_0,ξ_0) 的积分曲线 Γ 为 F 的次特征带.

次特征带当然全在特征集上，其证明与线性情况相同. $\rho>m+2$ 这一条件的作用在于保证积分曲线的唯一性. 这是因为这时

$$u_\beta=\partial^\beta u\in C^{\rho-|\beta|}\subset C^{\rho-m}\subset C^2,$$

而 H_{P_m} 是 C^1 向量场，这就足以保证积分曲线的存在和唯一性. 还要说明，以上概念全是相对于某个 $u(x)$ 而言的.

定理 2.5.2 设 u 是(2.5.1)的实 $C^{\rho+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 解，$\rho>0$ 非整数(或 $u\in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$s>n/2$)，则对一切非特征点 (x_0,ξ_0)，$u\in C^{2\rho+m}_{(x_0,\xi_0)}$ (或 $u\in H^{2s+m-n/2}_{(x_0,\xi_0)}$).

证 我们只限于 $u\in C^{\rho+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的情况. 因为(2.5.1)左方 F 中的一切 $\partial^\beta u\in C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，可以对它仿线性化(定理 2.4.6)，即得

$$Pu=r, \qquad (2.5.3)$$

$r\in C^{2\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$P\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma^m_\rho)$. P 的象征是 $\sum_{|\beta|\leqslant m}(\partial F/\partial u_\beta)(\mathrm{i}\xi)^\beta$. 由于 $P_m(x_0,\xi_0)\neq 0$，由定理 2.3.18 知，必存在 P 之拟逆 $Q\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma^{-m}_{\rho-m})$ 使

$$QP=I+R,$$

R 是 (x_0,ξ_0) 的某个锥邻域中的 ρ-正则化算子. 对(2.5.3)双方左作用以 Q 即有

$$u=Qr-Ru\in C^{2\rho+m}_{(x_0,\xi_0)}.$$

$u\in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的情况证法相仿.

第二个问题是线性 PsDO 的奇性传播定理对非线性情况的推

广. 关于具有实主象征的 PsDO 的奇性传播定理，有 Hörmander 的基本结果，大体上说是，若 P 是 m 阶适当的 PsDO，且其主象征 $P_m(x,\xi)$ 取实值，如果 $u\in\mathscr{D}'$ 使 $Pu=f$，则

$$\mathrm{WF}(u)\backslash\mathrm{WF}(f)\subset P_m^{-1}(0)=\mathrm{Char}\,P,$$

且在 P_m 的 Hamilton 场下不变. 即是说，如果 (x_0,ξ_0) 是 u 的奇点，即在 $\mathrm{WF}(u)$ 中，但不在 $\mathrm{WF}(f)$ 中，则这个奇性必沿 P 的次特征带 H_{P_m} 传播. 这个定理的证明可以参看齐民友、徐超江[Q-X]. 对于非线性偏微分方程，如果解的奇性不是太高，则利用仿线性化技巧也可以得到类似结果. 我们的基本结果如下：

定理 2.5.3 设 $u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是方程(2.5.1)的一个实解，$s>n/2+m+2$，(x_0,ξ_0) 是 F 的特征点，Γ 是过 (x_0,ξ_0) 的次特征带. 若 $u\in H^t_{(x_0,\xi_0)}$，则 $u\in H^t_\Gamma$，

$$t\leqslant 2s-\frac{n}{2}-m-1=s+\left(s-\frac{n}{2}-m-2\right)+1.$$

这个结果属于 J.-M. Bony [Bon1]. 它与 Hörmander 关于线性 PsDO 的奇性传播定理[Hö2]相仿，但又有重要区别. 首先，由嵌入定理，$u\in C^\rho$，$\rho>m+2$，从而在作仿线性化以后所得的 Hamilton 场至少是 C^1 场，这就足以保证过 (x_0,ξ_0) 的次特征带 Γ 的存在与唯一性. 其次，定理中已假设 $u\in H^s_{\mathrm{loc}}$，但其结果只保证沿 Γ，u 微局部地属于 H^t. 这里由于 $s>n/2+m+2$，所以 t 可以取得大于 $s-1$. 即是说，在传播中 u 具有较高的光滑性，也就是较低的奇性. 这些都是非线性传播的重要特征.

由于定理证明较长，我们这里只给出其主要思想和步骤，详细的证明可以参看 Bony 的原文[Bon1]和齐民友、徐超江[Q-X]. 首先将方程(2.5.1)线性化为 $Pu=r$，其主象征为

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m}\frac{\partial F}{\partial u_\beta}(\mathrm{i}\xi)^\beta\in\Sigma^m_{s-m-n/2},$$

而对 x 是 C^2 函数，对 ξ 是 C^∞ 的 m 次正齐次函数 $(\xi\neq 0)$，$r\in H^{2s-2m-n/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 因为 $t\leqslant 2s-n/2-m-1$，所以 $r\in H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 这样，定理 2.5.3 可以改述为

定理 2.5.3′ 设 $P\in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{s-m-n/2})$，$s>m+n/2+2$，主象征 $P_m(x,\xi)$ 对 x 是 C^2 函数，对 ξ 是 C^∞ 的 m 次正齐次函数（$\xi\neq 0$）. 又设 $u\in H^s_{loc}(\Omega)\cap H^t_{(x_0,\xi_0)}$，$Pu\in H^{t-m+1}_{loc}(\Omega)$（这里 s 与 t 如上所述），则 $u\in H^t_\Gamma$.

用一个 $1-m$ 阶椭圆 PsDO 作用于 $Pu=r$. 可以设 P 为一阶 ParaDO，而 $Pu\in H^t_{loc}(\Omega)$，即将问题归结为 $m=1$ 的情况. 我们还可以假设 H_{P_m} 与锥轴方向 $\sum_{j=1}^n \xi_j\partial_{\xi_j}$ 不平行. 这是因为，如果二者是平行的，则过 (x_0,ξ_0) 的次特征带是 $\{(x_0,\lambda\xi_0);\ \lambda\geqslant 1\}$，但若 $u\in H^t_{(x_0,\xi_0)}$ 自然有 $u\in H^t_{(x_0,\lambda\xi_0)}$，因此定理的结论将是平凡的. 这个定理的证明基于一个估计式. 为了介绍它，先引进一些记号. V 是 (x_0,ξ_0) 的一个锥邻域，U 是 Γ 的一个锥邻域. 对于 $u\in H^s(U)$，我们可以作它的一个半范

$$\| u \|_{s,U} = \| Mu \|_{H^s}. \tag{2.5.4}$$

这里 M 是一个零阶 PsDO，其象征的支集含于 U 的一个紧锥形子集内. 于是我们将证明，存在 $\varepsilon>0$，使得对一切 $s>0$，有一正常数 $M=M(s)$ 以及零阶 PsDO K_δ（δ 是一参数），以及(2.5.4)型的半范 $\|\cdot\|_{s,V}$，$\|\cdot\|_{s-1,U}$，$\|\cdot\|_{s-\varepsilon,U}$ 使得

$$\| K_\delta u \|_{H^s} \leqslant \delta \| K_\delta P u \|_{H^s} + M(s)\{ \| u \|_{s,V} + \| Pu \|_{s-1,U} + \| Pu \|_{s-1,U} + \| u \|_{s-\varepsilon,U} + \| u \|_{s-\sigma+1} \},$$

$$\sigma = s - m - \frac{n}{2}. \tag{2.5.5}$$

这里 $u\in C_0^\infty(F)$ 而 F 是 Ω 的任一紧子集.

为了由(2.5.5)证明定理 2.5.3′，就要用到 $\{\chi(1-\alpha\Delta)^{-1}\chi\}$ 当 $\alpha\to 0$ 时是 Σ^0_σ 中的有界族. 同时，为了证明它，还要用到关于 ParaDO 的强 Gårding 不等式：

强 Gårding 不等式 设 $S\in \mathrm{Op}(\Sigma^m_\tau)$，$\tau>0$，且 S 的主象征 $S_m(x,\xi)\geqslant 0$，则存在 $\mu>0$ 使得对 Ω 之任一紧子集 K 以及 $u\in C_0^\infty(K)$ 有

$$\mathrm{Re}\,(Su,u) \geqslant -C_K \| u \|^2_{H^{(m-\mu)/2}}.$$

关于一般 PsDO 的强 Gårding 不等式可以参看齐民友[Qi]第五章定理 5.5.18. 但与这里不同，在那里 PsDO 的主象征对 x 是 C^∞ 的，而这里 $S_m(x,\xi)$ 对 x 只属于 C^τ. 这个不等式的证明也见 Bony [Bon1].

(2.5.5)中的零阶 PsDO K_δ 以 k_δ 为主象征. 关于 k_δ 的作法，要用到下面的结果：

引理 2.5.4 U,V 之定义如前，必存在一族含参数的 C^∞ 函数 k_δ，它们对 ξ 是零次正齐次的，而支集在 U 的某个紧锥形子集内，使得

$$Hk_\delta \geqslant \frac{1}{\delta} k_\delta,$$

H 是主象征 $P_1(x,\xi)$（注意已设 $m=1$）的 Hamilton 场.

第3章 切向仿微分算子理论

在上一章我们已看到在讨论非线性方程时，仿微分算子确是一个十分有力的工具. 它使得非线性偏微分方程的一些问题(特别是方程解的正则性问题)有了一个一般性的规范的讨论框架. 但这里有一个问题——与拟微分算子一样——仿微分算子是定义在开集上的，对带边的区域(更一般地，带边的流形)上的问题(例如各种边值问题)，第2章的方法是不够的. 一个很自然的想法是将区域边缘的法向与切向分别处理，这就导出一套所谓的"切向仿微分计算". 本章的内容大部分出自 M. Sablé-Tougeron 的工作(见[Sa])，当然为使本章的讨论更系统我们作了不少修改与补充. 与第2章相对应，我们在讲述 Hörmander 空间的特征化理论后，接着讨论切向仿乘积，切向仿微分算子及切向仿线性化的结果，最后给出这套理论在讨论非线性奇性反射中的一个应用.

3.1 Hörmander 空间

为了研究边值问题，Hörmander 提出一类新的空间作为 Sobolev 空间的推广，这就是 Hörmander 空间 $H^s_{s'}$(见[Hö5]). 现在我们用 Littlewood-Paley 分解来讨论它们的性质(注意，Hörmander 原来用的记号 $H^{s,s'}$ 现在留作余法分布的记号之用).

首先引进一些记号. 令 $x=(x',x_n)=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\in\mathbf{R}^n$，$n\geqslant 2$，其对偶变量为 $\xi=(\xi',\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n)$，

$$|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2+\xi_n^2=|\xi'|^2+\xi_n^2.$$

定义 3.1.1 *若 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 之 Fourier 变换满足下式:*

$$\|u\|^2_{s,s'}=(2\pi)^{-n}\int(1+|\xi|^2)^s(1+|\xi'|^2)^{s'}|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi<+\infty,\tag{3.1.1}$$

这种 u 的集合称之为 Hörmander 空间，记为 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，其中 s,s' 均为实数.

易见 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间. 而且当 $s'=0$ 时即为 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^n)=H^s_0(\mathbf{R}^n)$.

定理 3.1.2 *1) 为使 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)\subset H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)$，充要条件是*

$$t\leqslant s,\quad t+t'\leqslant s+s'.$$

2) $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 的充要条件是

$$u\in H^{s-1}_{s'+1}(\mathbf{R}^n),\quad \partial_{x_n}u\in H^{s-1}_{s'}(\mathbf{R}^n).$$

证 1)的证明由定义 3.1.1 是自明的. 对 2)，若 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，则由定义 3.1.1 知 $\partial_{x_n}u\in H^{s-1}_{s'}(\mathbf{R}^n)$，又由 1)知 $u\in H^{s-1}_{s'+1}(\mathbf{R}^n)$. 反过来，若 $u\in H^{s-1}_{s'+1}(\mathbf{R}^n)$，$\partial_{x_n}u\in H^{s-1}_{s'}(\mathbf{R}^n)$，记 $\langle\xi\rangle^s=(1+|\xi|^2)^{s/2}$，$\langle\xi'\rangle^{s'}=(1+|\xi'|^2)^{s'/2}$，$\langle\xi_n\rangle=(1+\xi_n^2)^{1/2}$，即有

$$\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'+1}\hat{u},\langle\xi_n\rangle\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'}\hat{u}\in L^2.$$

注意

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^s\langle\xi'\rangle^{s'}&=(1+|\xi|^2)^{1/2}\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'}\\&\leqslant(\langle\xi'\rangle+\langle\xi_n\rangle)\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'}\\&\leqslant\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'+1}+\langle\xi_n\rangle\langle\xi\rangle^{s-1}\langle\xi'\rangle^{s'},\end{aligned}$$

故 $\langle\xi\rangle^s\langle\xi'\rangle^{s'}\hat{u}\in L^2$，即 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$.

在考虑非线性偏微分方程边值问题时，需更详细研究 Hörmander 空间的性质. 特别是 Hörmander 空间在非线性映射下的性质(最典型的例子是函数乘积)，所以我们首先研究 Hörmander 空间在什么条件下对通常乘积构成代数.

定理 3.1.3 *若 $s+s'>n/2$，$s>1/2$，$s+2s'>1/2$，则 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 对乘积构成一个代数.*

证 与定理 2.2.1 的证明思想类似. 设 $u,v\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，考虑

$$\langle\xi\rangle^s\langle\xi'\rangle^{s'}(uv)\hat{}\,(\xi)=\int\langle\xi\rangle^s\langle\xi'\rangle^{s'}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$=\int\langle\xi\rangle^{s}\langle\xi'\rangle^{s'}\langle\xi-\eta\rangle^{-s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-s'}\langle\eta\rangle^{-s}\langle\eta'\rangle^{-s'}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

其中

$$\hat{f}(\xi-\eta)=\langle\xi-\eta\rangle^{s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{s'}\hat{u}(\xi-\eta),$$
$$\hat{g}(\eta)=\langle\eta\rangle^{s}\langle\eta'\rangle^{s'}\hat{v}(\eta).$$

记

$$F_1(\xi,\eta)=\langle\xi\rangle^{s}\langle\xi-\eta\rangle^{-s}\langle\eta\rangle^{-s},$$
$$F_2(\xi',\eta')=\langle\xi'\rangle^{s'}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-s'}\langle\eta'\rangle^{-s'},$$
$$F(\xi,\eta,\xi',\eta')=F_1(\xi,\eta)F_2(\xi',\eta').$$

又记 χ_1 和 χ_2 分别为集合 $\{(\xi,\eta);\ 2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|\}$ 与 $\{(\xi,\eta);\ 2|\eta|\leqslant|\xi|\}$ 的特征函数，χ_1' 和 χ_2' 分别为集合 $\{(\xi',\eta');\ 2|\xi'-\eta'|\leqslant|\xi'|\}$ 与 $\{(\xi',\eta');\ 2|\eta'|\leqslant|\xi'|\}$ 的特征函数，

$$\chi_3=1-\chi_1-\chi_2,\quad \chi_3'=1-\chi_1'-\chi_2'.$$

那么可写

$$F=\sum_{i,j=1}^{3}F\chi_i\chi_j'=\sum_{i,j=1}^{3}G_{i,j},$$

并记 $W_{i,j}=\operatorname{supp}\chi_i\chi_j'$. 由引理 2.2.2 我们知道欲证 $u\cdot v\in H_{s'}^{s}(\mathbf{R}^n)$，只需证明上式中的每一项的平方对 ξ 或对 η 积分有界. 下面分别估计 $G_{i,j}(i,j=1,2,3)$ 之平方的积分.

1） 首先考虑 $\int_{W_{1,1}}|G_{1,1}|^2\mathrm{d}\eta$，其中

$$W_{1,1}=\{(\xi,\eta);\ 2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|,\ 2|\xi'-\eta'|\leqslant|\xi'|\},$$

那么由 $2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|$ 及 $2|\xi'-\eta'|\leqslant|\xi'|$ 知 $|\xi|\leqslant2|\eta|$，$|\xi'|\leqslant2|\eta'|$.

$$\int_{W_{1,1}}|G_{1,1}|^2\mathrm{d}\eta\leqslant\begin{cases}C\int_{W_{1,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta, & \text{当 } s'\geqslant0,\\ C\int_{W_{1,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta, & \text{当 } s'<0.\end{cases}$$

当 $s'\geqslant0$ 时，令 $\xi_n-\eta_n=\langle\xi'-\eta'\rangle\tau$，那么

$$\langle\xi-\eta\rangle^2=1+|\xi'-\eta'|^2+\langle\xi'-\eta'\rangle^2|\tau|^2$$
$$=\langle\xi'-\eta'\rangle^2\langle\tau\rangle^2,$$

并且

$$\int_{W_{1,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta$$
$$=C\int_{W_{1,1}}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s-2s'+1}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant C\int_{\mathbf{R}}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2(s+s')+1}\mathrm{d}\eta'.$$

由定理条件 $s>1/2$，$s+s'>n/2$ 知以上两积分是有界的，即存在一个有限的常数 M，当 $s'\geqslant0$ 时，

$$\int_{W_{1,1}}|G_{1,1}|^2\mathrm{d}\eta<M.$$

当 $s'<0$ 时，因 $\langle\eta'\rangle\leqslant\langle\xi'-\eta'\rangle+\langle\xi'\rangle\leqslant C\langle\xi'\rangle$，故 $\langle\eta'\rangle^{-2s'}\leqslant C\langle\xi'\rangle^{-2s'}$，那么

$$\int_{W_{1,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta\leqslant C\langle\xi'\rangle^{-2s'}\int_{|\xi-\eta|\leqslant|\xi|/2}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\mathrm{d}\eta$$
$$\leqslant C\langle\xi'\rangle^{-2s'}\langle\xi\rangle^{-2s+n}$$
$$\leqslant C\langle\xi\rangle^{-2(s+s')+n}.$$

因为 $s+s'>n/2$，以上积分有界，故 $s'<0$ 时，也有

$$\int_{W_{1,1}}|G_{1,1}|^2\mathrm{d}\eta<M.$$

2） 再考虑 $\int_{W_{1,2}}|G_{1,2}|^2\mathrm{d}\eta$，其中

$$W_{1,2}=\{(\xi,\eta);\ 2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|,\ 2|\eta'|\leqslant|\xi'|\},$$

那么由 $2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|$ 及 $2|\eta'|\leqslant|\xi'|$ 知 $|\xi|\leqslant2|\eta|$，$|\xi'|\leqslant2|\xi'-\eta'|$.

$$\int_{W_{1,2}}|G_{1,2}|^2\mathrm{d}\eta\leqslant\begin{cases}C\int_{W_{1,2}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta, & \text{当 } s'\geqslant0,\\ C\int_{W_{1,2}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta, & \text{当 } s'<0.\end{cases}$$

对 $s'\geqslant0$ 的情形，同 1）令 $\xi_n-\eta_n=\langle\xi'-\eta'\rangle\tau$，那么

$$\int_{W_{1,2}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\eta$$

$$=C\int_{W_{1,2}}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s+1}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C\int_{\mathbf{R}}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\tau\left(\langle\xi'\rangle^{-2s+1}\int_{2|\eta'|\leqslant|\xi'|}\langle\eta'\rangle^{-2s}\mathrm{d}\eta'\right)$$

$$\leqslant M.$$

$s'<0$ 时用 1)中 $s'\geqslant0$ 情形的方法即可证得

$$\int_{W_{1,2}}|G_{1,2}|^2\mathrm{d}\eta<M.$$

3） 考虑 $\int_{W_{1,3}}|G_{1,3}|^2\mathrm{d}\xi$，其中

$$W_{1,3}=\{(\xi,\eta);\ 2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|,\ |\xi'|<2|\eta'|,\ |\xi'|<2|\xi'-\eta'|\}.$$

由 $2|\xi-\eta|\leqslant|\xi|$ 知 $|\xi|\leqslant2|\eta|$. 再注意 $s'<0$ 时 $\langle\eta'\rangle^{-2s'}\leqslant C\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}$，就有

$$\int_{W_{1,3}}|G_{1,3}|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\begin{cases}C\int_{W_{1,3}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'\geqslant0,\\ C\int_{W_{1,3}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-4s'}\langle\xi'\rangle^{2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'<0.\end{cases}$$

同 1)，令 $\xi_n-\eta_n=\langle\xi'-\eta'\rangle\tau$，$s'\geqslant0$ 的情形类似于 1)，对 $s'<0$ 则由 $\langle\xi-\eta\rangle^2=\langle\xi'-\eta'\rangle^2\langle\tau\rangle^2$ 有

$$\int_{W_{1,3}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-4s'}\langle\xi'\rangle^{2s'}\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{W_{1,3}}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s-4s'+1}\langle\xi'\rangle^{2s'}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C\int_{|\xi'|<2|\eta'|}\langle\xi'\rangle^{-2s-2s'+1}\mathrm{d}\xi'\int_{\mathbf{R}}\langle\tau\rangle^{-2s}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C|\eta'|^{-2s-2s'+n},$$

上式中第一个不等式用到条件 $2s+4s'>1$ 与 $|\xi'|<2|\xi'-\eta'|$. 故也

证得 $\int_{W_{1,3}}|G_{1,3}|^2\mathrm{d}\xi<M.$

4） 考虑 $\int_{W_{3,1}}|G_{3,1}|^2\mathrm{d}\xi$，其中

$$W_{3,1}=\{(\xi,\eta);\ |\xi|<2|\eta|,\ |\xi|<2|\xi-\eta|,\ |\xi'|\geqslant2|\xi'-\eta'|\},$$

那么由 $|\xi'|\geqslant2|\xi'-\eta'|$ 知 $|\xi'|\leqslant2|\eta'|$.

$$\int_{W_{3,1}}|G_{3,1}|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\begin{cases}C\int_{W_{3,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'\geqslant0,\\ C\int_{W_{3,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'<0.\end{cases}$$

这里 $s'\geqslant0$ 的情形类似于 1)，当 $s'<0$ 时有

$$\int_{W_{3,1}}\langle\xi-\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi\leqslant C\int_{W_{3,1}}\langle\xi\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\langle\eta'\rangle^{-2s'}\int_{|\xi|<2|\eta|}\langle\xi\rangle^{-2s}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\langle\eta'\rangle^{-2s'}\langle\eta\rangle^{-2s+n}$$

$$\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2(s+s')+n}.$$

故有 $\int_{W_{3,1}}|G_{3,1}|^2\mathrm{d}\eta<M.$

5） 在

$$W_{3,3}=\{(\xi,\eta);\ |\xi|<2|\eta|,\ |\xi|<2|\xi-\eta|,\ |\xi'|<2|\eta'|,\ |\xi'|<2|\xi'-\eta'|\}$$

上我们考虑 $|G_{3,3}|^2$ 对 ξ 的积分. 而

$$\int_{W_{3,3}}|G_{3,3}|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\begin{cases}C\int_{W_{3,3}}\langle\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'\geqslant0,\\ C\int_{W_{3,3}}\langle\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi, & \text{当 } s'<0.\end{cases}$$

其中当 $s'\geqslant 0$ 时有

$$C\int_{W_{3,3}}\langle\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2(s+s')}\int_{|\xi|\leqslant 2|\eta|}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2(s+s')+n}.$$

又由 $|\xi'|\leqslant 2|\eta'|$，$s'<0$ 知 $\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\leqslant C\langle\eta'\rangle^{-2s'}$，所以

$$C\int_{W_{3,3}}\langle\eta\rangle^{-2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}\langle\xi'-\eta'\rangle^{-2s'}\langle\eta'\rangle^{-2s'}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2s}\langle\eta'\rangle^{-4s'}\int_{W_{3,3}}\langle\xi'\rangle^{2s'}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2s-4s'}\left(\int_{|\xi_n|<2|\eta|}\mathrm{d}\xi_n\right)\left(\int_{|\xi'|\leqslant 2|\eta'|}\langle\xi'\rangle^{2s'}\mathrm{d}\xi'\right)$$

$$\leqslant C\langle\eta\rangle^{-2s-4s'+1}\langle\eta'\rangle^{2s'+n-1}$$

$$\leqslant C\langle\eta'\rangle^{-2s-2s'+n}.$$

上面最后一个不等式用到条件 $s+2s'>1/2$. 由以上三式即知

$$\int_{W_{3,3}}|G_{3,3}|^2\mathrm{d}\xi<M.$$

6) 最后考虑余下的四项. 将 η 换为 $\xi-\eta$，则 $\int_{W_{2,2}}|G_{2,2}|^2\mathrm{d}\eta$ 转化为 1)讨论的情形，$\int_{W_{2,1}}|G_{2,1}|^2\mathrm{d}\eta$，$\int_{W_{2,3}}|G_{2,3}|^2\mathrm{d}\eta$ 以及 $\int_{W_{3,2}}|G_{3,2}|^2\mathrm{d}\eta$ 分别转化为 2)，3)和 4)讨论的情形.

综上所述，由引理 2.2.2 知 $u\cdot v\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$. 至此定理证毕.

下面我们考虑 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 空间上的 L-P 分解. 仍如定理 2.1.2 那样作出单位分解 $1=\sum_{p=-1}^{\infty}\varphi_p(\xi)$，其中

$$\varphi_{-1}(\xi)=\psi(\xi),$$

$$\varphi_p(\xi)=\varphi(2^{-p}\xi),$$

$$\varphi(\xi)=\psi(2^{-1}\xi)-\psi(\xi),$$

$\psi(\xi)$ 为 C^∞ 函数，并且 $\psi(\xi)$ 在 $|\xi|\leqslant 1/2$ 时为 1，在 $|\xi|>1$ 时为 0. 则由定理 2.1.2 的 3)有

$$\psi(\xi)+\sum_{q=0}^{p-1}\varphi_q(\xi)=\psi(2^{-p}\xi).\tag{3.1.2}$$

我们又记 $\varphi'_p(\xi')=\varphi_p(\xi',0)$ $(p=-1,0,1,2,\cdots)$，则有 $1=\sum_{p=-1}^{\infty}\varphi'_p(\xi')$. 相应于(3.1.2)有

$$\psi'(\xi')+\sum_{q=0}^{p'-1}\varphi'_q(\xi')=\psi'(2^{-p'}\xi').\tag{3.1.3}$$

记 $\mathrm{D}=(\mathrm{D}',\mathrm{D}_n)=(\mathrm{D}_1,\cdots,\mathrm{D}_{n-1},\mathrm{D}_n)$，定义 $\Delta_p=\varphi(2^{-p}\mathrm{D})$，$\Delta'_{p'}=\varphi'(2^{-p'}\mathrm{D}')$ $(p\geqslant 0,\ p'\geqslant 0)$，$\Delta_{-1}=\psi(\mathrm{D})$，$\Delta'_{-1}=\psi'(\mathrm{D}')$. 又记 $\Delta_{p,p'}=\Delta_p\circ\Delta'_{p'}$，并在以下恒规定 $\Delta_{-2}=\Delta'_{-2}=0$. 定义双指标环

$$C_{p,p'}=\{\xi\in\mathbf{R}^n;\ \kappa^{-1}2^p\leqslant|\xi|\leqslant\kappa 2^{p+1},$$

$$\kappa^{-1}2^{p'}\leqslant|\xi'|\leqslant\kappa 2^{p'+1}\},$$

其中常数 $\kappa>1$，那么

$$\mathrm{supp}\,(\Delta_{p,p'}u)\hat{}\subset C_{p,p'}.$$

注意到 $p'>[\ln\kappa/\ln 2]+p+1$ 时(这里 $[a]$ 表示 a 的整数部分)，双指标环 $C_{p,p'}=\varnothing$，故仅在 $p'\leqslant[\ln\kappa/\ln 2]+p+1$ 时 $\Delta_{p,p'}$ 才不是零算子. 在本章我们总记 $N=[\ln\kappa/\ln 2]+1$，并经常用到 $p'>p+N$ 时 $\Delta_{p,p'}=0$ 这一事实.

有了以上准备，我们对 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 作双重二进分解. 首先，由 $\psi(\xi)+\sum_{p=0}^{\infty}\varphi_p(\xi)=1$，有

$$u(x)=\Delta_{-1}u+\sum_{p=0}^{\infty}\Delta_p u.\tag{3.1.4}$$

再对(3.1.4)中的每一项在 $x'\in\mathbf{R}^{n-1}$ 上作二进分解，有

$$u(x)=\Delta_{-1}\circ(\Delta'_{-1}+\sum_{p'\geqslant 0}\Delta'_{p'})u+\sum_{p\geqslant 0}\Delta_p\circ(\Delta'_{-1}+\sum_{p'\geqslant 0}\Delta'_{p'})u$$

$$=\Delta_{-1,-1}u+\sum_{p'\geqslant 0}\Delta_{-1,p'}u+\sum_{p\geqslant 0}\Delta_{p,-1}u+\sum_{p,p'\geqslant 0}\Delta_{p,p'}u.$$

由于 $\mathrm{supp}\,(\Delta_{-1,p'}u)\hat{}\subset C_{-1,p'}=\{\xi\in\mathbf{R}^n;\ |\xi|\leqslant 1,\ \kappa^{-1}2^{p'}\leqslant|\xi'|\leqslant\kappa 2^{p'+1}\}$，故当 $p'>\ln\kappa/\ln 2$ 时，上式右方为空集，相应的 $\Delta_{-1,p'}u=0$（也不妨认为 $p'>-1+N$ 时 $\Delta_{-1,p'}=0$），故上式可化为

$$u(x)=\sum_{p'=-1}^{N}\Delta_{-1,p'}u+\sum_{p\geqslant 0}\Delta_{p,-1}u+\sum_{p,p'\geqslant 0}\Delta_{p,p'}u.\tag{3.1.5}$$

这就是 u 的双重二进分解，利用它可以刻画 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 之性质如下：

定理 3.1.4 *$u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$之充分必要条件是*

$$\sum_{p'=-1}^{N}4^{p's'}\|\Delta_{-1,p'}u\|_0^2+\sum_{p\geqslant 0}4^{ps}\|\Delta_{p,-1}u\|_0^2$$
$$+\sum_{p,p'\geqslant 0}4^{ps+p's'}\|\Delta_{p,p'}u\|_0^2<+\infty. \tag{3.1.6}$$

这里 $\|\cdot\|_0$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$范数.

证 先设 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，由于在 $\operatorname{supp}\varphi_p(\xi)$内$|\xi|\sim 2^p$，在 $\operatorname{supp}\varphi'_{p'}(\xi')$内$|\xi'|\sim 2^{p'}$，所以有不等式

$$\sum_{p'=-1}^{N}4^{p's'}\psi^2(\xi)\varphi'^2_{p'}(\xi')+\sum_{p=0}^{\infty}4^{ps}\varphi_p^2(\xi)\psi'^2(\xi')$$
$$+\sum_{p,p'\geqslant 0}4^{ps+p's'}\varphi_p^2(\xi)\varphi'^2_{p'}(\xi')\leqslant C\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{2s'},$$

这里$\langle\xi\rangle^2=1+|\xi|^2$，$\langle\xi'\rangle^2=1+|\xi'|^2$. 上式双方乘以$|\hat{u}(\xi)|^2$，再对$\xi$积分即知(3.1.6)成立.

反之，设(3.1.6)成立. 记

$$u_1=\sum_{p\geqslant 0}\Delta_{p,-1}u,\quad u_2=\sum_{p,p'\geqslant 0}\Delta_{p,p'}u,$$

由于(3.1.5)的第一项和式只是有限和，所以只需证明

$$\|u_1\|_{s,s'}^2\leqslant C_1\sum_{p\geqslant 0}4^{ps}\|\Delta_{p,-1}u\|_0^2,$$

$$\|u_2\|_{s,s'}^2\leqslant C_2\sum_{p,p'\geqslant 0}4^{ps+p's'}\|\Delta_{p,p'}u\|_0^2$$

即可. 但对 $\mathbf{R}^n_\xi$ 上每一点至多有限多个$(\Delta_{p,p'}u)^\wedge$不为零(且对ξ是一致有限的，不妨设至多有 M 个)，所以易得

$$\int\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}|\hat{u}_2(\xi)|^2d\xi$$
$$=\int\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}\Big|\sum_{p,p'\geqslant 0}(\Delta_{p,p'}u)^\wedge\Big|^2d\xi$$
$$\leqslant M\sum_{p,p'\geqslant 0}\int\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}|(\Delta_{p,p'}u)^\wedge|^2d\xi$$
$$\leqslant C\sum_{p,p'\geqslant 0}4^{ps+p's'}\|\Delta_{p,p'}u\|_0^2.$$

对 u_1 亦有类似估计. 所以 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\|u\|_{s,s'}^2\leqslant C\Big(\sum_{p'=-1}^{N}4^{p's'}\|\Delta_{-1,p'}u\|_0^2+\sum_{p\geqslant 0}4^{ps}\|\Delta_{p,-1}u\|_0^2$$
$$+\sum_{p,p'\geqslant 0}4^{ps+p's'}\|\Delta_{p,p'}u\|_0^2\Big), \tag{3.1.7}$$

定理证毕.

推论 3.1.5 *若 $u=\sum_{p,p'}u_{p,p'}$，其中 $\operatorname{supp}\hat{u}_{p,p'}\subset C_{p,p'}$，且 $\sum_{p,p'}4^{ps+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2<+\infty$，则 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$.*

当 $s>0$ 或 $s'>0$ 时，我们有更强的结论.

定理 3.1.6 *设$\{u_{p,p'}\}_{p,p'\geqslant -1}$是一族 L^2 函数，$\kappa>1$，$\delta\geqslant 0$ 为任意常数.*

1) *若 $s>0$，$\operatorname{supp}\hat{u}_{p,p'}\subset\{|\xi|\leqslant\kappa 2^p,\ \kappa^{-1}2^{p'+\delta}\leqslant|\xi'|\leqslant\kappa 2^{p'+\delta}\}$，且使 $\sum_{p,p'}4^{ps+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2<+\infty$，则 $u=\sum_{p,p'}u_{p,p'}\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，并且*

$$\|u\|_{s,s'}^2\leqslant C\Big(\sum_{p,p'}4^{ps+(p'+\delta)s'}\|u_{p,p'}\|_0^2\Big).$$

2) *若 $s'>0$，$\operatorname{supp}\hat{u}_{p,p'}\subset\{\kappa^{-1}2^{p+\delta}\leqslant|\xi|\leqslant\kappa 2^{p+\delta},\ |\xi'|\leqslant\kappa 2^{p'}\}$，且使 $\sum_{p,p'}4^{ps+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2<+\infty$，则 $u=\sum_{p,p'}u_{p,p'}\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，并且*

$$\|u\|_{s,s'}^2\leqslant C\Big(\sum_{p,p'}4^{(p+\delta)s+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2\Big).$$

证 1) 令 $v_{l,p'}=\Delta_l\sum_{p\geqslant -1}u_{p,p'}$，当 $l>p+L$ 且 L 充分大时(L 为仅依赖于 κ 的常数)，因算子 Δ_l 的象征在 $\operatorname{supp}(u_{p,p'})^\wedge\subset\{|\xi|\leqslant\kappa 2^p\}$ 上为零，故 $v_{l,p'}=\Delta_l\sum_{p\geqslant l-L}u_{p,p'}$. 另一方面 $u=\sum_{l,p'\geqslant -1}v_{l,p'}$，仿照定理 3.1.4 的证明可知

$$\|u\|_{s,s'}^2\leqslant C\Big(\sum_{l,p'\geqslant -1}4^{ls+(p'+\delta)s'}\|v_{l,p'}\|_0^2\Big). \tag{3.1.8}$$

而

$$\|v_{l,p'}\|_0\leqslant C\sum_{p\geqslant l-L}\|u_{p,p'}\|_0$$
$$=C\sum_{p\geqslant l-L}2^{-ps-(p'+\delta)s'}(2^{ps+(p'+\delta)s'}\|u_{p,p'}\|_0)$$

$$\leqslant C2^{-ls-(p'+\delta)s'}\sum_{p\geqslant l-L}2^{(l-p)s}(2^{ps+(p'+\delta)s'}\|u_{p,p'}\|_0).$$

令 $\varepsilon_{p,p'}=2^{ps+(p'+\delta)s'}\|u_{p,p'}\|_0$，那么由定理条件知 $\varepsilon_{p,p'}\in l_2(\mathbf{N}^2)$，故当 $s>0$ 时，$\sum_{p\geqslant l-L}2^{(l-p)s}\varepsilon_{p,p'}=\eta_{l,p'}\in l_2(\mathbf{N}^2)$，所以有

$$\|v_{l,p'}\|_0\leqslant C2^{-ls-(p'+\delta)s'}\eta_{l,p'}. \tag{3.1.9}$$

由(3.1.8),(3.1.9)有

$$\|u\|_{s,s'}^2\leqslant C\sum_{l,p'}4^{ls+(p'+\delta)s'}\cdot 4^{-ls-(p'+\delta)s'}\eta_{l,p'}^2 = C\sum_{l,p'}\eta_{l,p'}^2<+\infty,$$

故 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$.

2) 对于 2)，令 $v_{p,l'}=\Delta'_{l'}\sum_{p'\geqslant -1}u_{p,p'}$，类似于 1)的证明可得 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$.

定理 3.1.7 设 $\{u_{p,p'}\}_{p,p'\geqslant -1}$ 是一族 L^2 函数，$\kappa>1$ 是一任意给定的常数，$s,s'>0$，那么下述论断是等价的：

1) $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$；

2) $\operatorname{supp}\hat{u}_{p,p'}\subset\{|\xi|\leqslant\kappa 2^p,|\xi'|\leqslant\kappa 2^{p'}\}$，且使

$$\sum_{p,p'}4^{ps+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2<+\infty;$$

3) 存在 s_0,s_0' 满足 $s_0>s$，$s_0'>s'$，使 $u_{p,p'}\in H^{s_0}_{s_0'}(\mathbf{R}^n)$，并且对任意 $|\alpha|\leqslant s_0$，$|\beta|\leqslant s_0'$ 有

$$\|\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta u_{p,p'}\|_0\leqslant 2^{-p(s-|\alpha|)-p'(s'-|\beta|)}\varepsilon_{p,p'}(\alpha,\beta), \tag{3.1.10}$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}(\alpha,\beta)\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$.

证 由定理 3.1.4 即知 1)⇒2)是显然的.

下证 2)⇒3). 这时显然有 $u_{p,p'}\in H^{s_0}_{s_0'}(\mathbf{R}^n)$，以下只需估计 $\|\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta u_{p,p'}\|_0$. 考虑函数 $a(x'),b(x_n)$ 使其 Fourier 变换 $\hat{a}(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，$\hat{b}(\xi_n)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，并且在 $\{|\xi'|\leqslant 2\kappa\}$ 上 $\hat{a}(\xi')=1$，在 $\{|\xi_n|\leqslant 2\kappa\}$ 上 $\hat{b}(\xi_n)=1$，那么记 $\tilde{p}=\min\{p,p'\}$ 有

$$\hat{u}_{p,p'}(\xi)=\hat{u}_{p,p'}(\xi)\hat{a}(2^{-\tilde{p}}\xi')\hat{b}(2^{-p}\xi_n).$$

从而

$$u_{p,p'}(x)=u_{p,p'}(x)*[2^{p+\tilde{p}(n-1)}a(2^{\tilde{p}}x')b(2^px_n)],$$

$$\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta u_{p,p'}(x)=u_{p,p'}(x)*[2^{p(1+\alpha_n)+\tilde{p}(n-1+|\alpha'|+|\beta|)}a^{(\alpha'+\beta)}(2^{\tilde{p}}x')b^{(\alpha_n)}(2^px_n)].$$

对 x_n,x' 分别利用 Young 不等式有

$$\|\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta u_{p,p'}\|_0\leqslant C_{\alpha,\beta}2^{\tilde{p}(|\alpha'|+|\beta|)+p\alpha_n}\|u_{p,p'}\|_0.$$

由 2)即可从上式推出(3.1.10). 故 3)得证.

最后我们证明 3)⇒1). 事实上，由(3.1.10)知存在常数 M 使

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p,p'}4^{ps+p's'}\|u_{p,p'}\|_0^2\leqslant M,\\
&\sum_{p,p'}4^{p(s-s_0)+p's'}\|u_{p,p'}\|_{s_0,0}^2\leqslant M,\\
&\sum_{p,p'}4^{ps+p'(s'-s_0')}\|u_{p,p'}\|_{0,s_0'}^2\leqslant M,\\
&\sum_{p,p'}4^{p(s-s_0)+p'(s'-s_0')}\|u_{p,p'}\|_{s_0,s_0'}^2\leqslant M.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.11}$$

令

$$\theta_{p,p'}(\xi)=4^{ps+p's'}(1+4^{-ps_0}\langle\xi\rangle^{2s_0}+4^{-p's_0'}\langle\xi'\rangle^{2s_0'}+4^{-ps_0-p's_0'}\langle\xi\rangle^{2s_0}\langle\xi'\rangle^{2s_0'}).$$

注意对任意固定的 ξ，存在 $p_0=p_0(\xi)$，$p_0'=p_0'(\xi')$ 使

$$2^{p_0}<\langle\xi\rangle<2^{p_0+1},\quad 2^{p_0'}<\langle\xi'\rangle<2^{p_0'+1}.$$

那么

$$\begin{aligned}
\sum_{p,p'}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)&=\sum_{p>p_0,p'>p_0'}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)+\sum_{p>p_0,p'\leqslant p_0'}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)\\
&\quad+\sum_{p\leqslant p_0,p'>p_0'}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)+\sum_{p\leqslant p_0,p'\leqslant p_0'}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)\\
&\leqslant\sum_{p>p_0,p'>p_0'}4^{-ps-p's'}+\sum_{p>p_0,p'\leqslant p_0'}4^{-ps+p'(s_0'-s')}\langle\xi'\rangle^{-2s_0'}\\
&\quad+\sum_{p\leqslant p_0,p'>p_0'}4^{p(s_0-s)-p's'}\langle\xi\rangle^{-2s_0}\\
&\quad+\sum_{p\leqslant p_0,p'\leqslant p_0'}4^{p(s_0-s)+p'(s_0'-s')}\langle\xi\rangle^{-2s_0}\langle\xi'\rangle^{-2s_0'}
\end{aligned}$$

$$\leqslant 4^{-p_0 s - p_0' s'} + 4^{-p_0 s}\sum_{p'\leqslant p_0'} 4^{-(p_0'-p')(s_0'-s')}\langle\xi'\rangle^{-2s'}$$

$$+ 4^{-p_0' s'}\sum_{p\leqslant p_0} 4^{-(p_0-p)(s_0-s)}\langle\xi\rangle^{-2s}$$

$$+ \sum_{p\leqslant p_0,\, p'\leqslant p_0'} 4^{-(p_0-p)(s_0-s)-(p_0'-p')(s_0'-s')}\langle\xi\rangle^{-2s}\langle\xi'\rangle^{-2s'}$$

$$\leqslant C\langle\xi\rangle^{-2s}\langle\xi'\rangle^{-2s'}.$$

这里 C 是与 ξ 无关的常数. 而

$$\Big|\sum_{p+p'\leqslant N}\hat{u}_{p,p'}(\xi)\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{p+p'\leqslant N}\theta_{p,p'}^{-1}(\xi)\Big)\Big(\sum_{p+p'\leqslant N}\theta_{p,p'}\,|\hat{u}_{p,p'}(\xi)|^2\Big),$$

因此

$$\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{2s'}\Big|\sum_{p+p'\leqslant N}\hat{u}_{p,p'}(\xi)\Big|^2 \leqslant C\Big(\sum_{p+p'\leqslant N}\theta_{p,p'}\,|\hat{u}_{p,p'}(\xi)|^2\Big).$$

将上式对 ξ 积分并令 $N\to\infty$, 由(3.1.11)知 $u\in H_{s'}^{s}(\mathbf{R}^n)$.

注 从定理的证明可以看出上述定理的 3)中的(3.1.10)式可由(3.1.11)代替.

作为以上 L-P 分解的直接应用, 我们来讨论 Hörmander 空间在什么条件下可嵌入 Hölder 空间 $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$. 我们先看几个引理.

在 Hörmander 空间讨论中我们需对变量 x' 与 x_n 分别作不同的处理, 为此我们定义

$$\|f\|_{L^\infty(L^2)} = \sup_{x'}\Big(\int|f(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1.12}$$

$$\|f\|_{L^2(L^\infty)} = \Big(\int\big(\sup_{x_n}|f(x',x_n)|\big)^2\mathrm{d}x'\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.13}$$

并且我们有

引理 3.1.8 设 $u_{p,q}=\Delta_{p,q}u$, 则有

$$\|u_{p,q}\|_{L^\infty} \leqslant C2^{((n-1)q+p)/2}\|u_{p,q}\|_0, \tag{3.1.14}$$

$$\|u_{p,q}\|_{L^\infty(L^2)} \leqslant C2^{((n-1)q)/2}\|u_{p,q}\|_0, \tag{3.1.15}$$

$$\|u_{p,q}\|_{L^2(L^\infty)} \leqslant C2^{p/2}\|u_{p,q}\|_0. \tag{3.1.16}$$

证 1) 作 $\alpha(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $\beta(\xi_n)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, 使

$$\alpha(2^{-q}\xi')\,|_{\mathrm{supp}\,\hat{u}_{p,q}} = 1,\quad \beta(2^{-p}\xi_n)\,|_{\mathrm{supp}\,\hat{u}_{p,q}} = 1.$$

并作 $g(x'),h(x_n)$ 使 $\hat{g}=\alpha$, $\hat{h}=\beta$, 则

$$u_{p,q}=\alpha(2^{-q}D')\beta(2^{-p}D_n)u_{p,q}$$

$$=2^{(n-1)q+p}\int u_{p,q}(y)g(2^q(x'-y'))h(2^p(x_n-y_n))\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_n,$$

$$\|u_{p,q}\|_{L^\infty}\leqslant\|u_{p,q}\|_0\Big[\int|2^{(n-1)q+p}g(2^q(x'-y'))h(2^p(x_n-y_n))|^2\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_n\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$\int|g(2^q(x'-y'))h(2^p(x_n-y_n))|^2\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_n$$

$$\leqslant 2^{-(n-1)q-p}\|g\|_0\|h\|_0$$

和 $g,h\in L^2$, 故 $\|u_{p,q}\|_{L^\infty}\leqslant C2^{((n-1)q+p)/2}\|u_{p,q}\|_0$, 即证得(3.1.14).

2) 现证(3.1.15). 由

$$u_{p,q} = \alpha(2^{-q}D')u_{p,q} = 2^{(n-1)q}\int u_{p,q}(y',x_n)g(2^q(x'-y'))\mathrm{d}y'$$

即知

$\|u_{p,q}\|_{L^\infty(L^2)}$

$$= \sup_{x'}2^{(n-1)q}\Big[\int\Big(\int|u_{p,q}(y',x_n)|^2\mathrm{d}x_n\Big)^{\frac{1}{2}}|g(2^q(x'-y'))|\mathrm{d}y'\Big]$$

$$\leqslant \sup_{x'}2^{(n-1)q}\Big[\int\Big(\int|u_{p,q}(y',x_n)|^2\mathrm{d}x_n\Big)\mathrm{d}y'\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\Big[\int|g(2^q(x'-y'))|^2\mathrm{d}y'\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C2^{(n-1)q/2}\|u_{p,q}\|_0.$$

3) 最后证(3.1.16). 由

$$u_{p,q} = \beta(2^{-p}D_n)u_{p,q} = 2^p\int u_{p,q}(x',y_n)h(2^p(x_n-y_n))\mathrm{d}y_n,$$

同 2)即可证得(3.1.16).

类似(3.1.12),(3.1.13), 我们还可定义

$$\|f\|_{L^1(L^2)} = \int\Big(\int|f(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x', \tag{3.1.17}$$

$$\|f\|_{L^2(L^1)} = \Big[\int\Big(\int|f(x',x_n)|\mathrm{d}x_n\Big)^2\mathrm{d}x'\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.18}$$

那么相应于引理 3.1.8 我们有

引理 3.1.9 设 $u_{p,q}=\Delta_{p,q}u$，则有

$$\|u_{p,q}\|_0\leqslant C2^{((n-1)q+p)/2}\|u_{p,q}\|_{L^1},\tag{3.1.19}$$

$$\|u_{p,q}\|_0\leqslant C2^{((n-1)q)/2}\|u_{p,q}\|_{L^1(L^2)},\tag{3.1.20}$$

$$\|u_{p,q}\|_0\leqslant C2^{p/2}\|u_{p,q}\|_{L^2(L^1)}.\tag{3.1.21}$$

证 这一引理的证明与引理 3.1.8 证明是类似的，我们这里仅证(3.1.21)，余下留给读者作为练习. 与引理 3.1.8 相同作算子 $\beta(2^{-p}D_n)$，那么

$$u_{p,q}=\beta(2^{-p}D_n)u_{p,q}=2^p\int u_{p,q}(x',y_n)h(2^p(x_n-y_n))dy_n.$$

而

$$\begin{aligned}\|u_{p,q}\|_0&=\left(\int\left|\int 2^pu_{p,q}(x',y_n)h(2^p(x_n-y_n))dy_n\right|^2dx'dx_n\right)^{\frac12}\\&\leqslant 2^p\left(\int\left(\int|u_{p,q}(x',y_n)|dy_n\right)^2dx'\right)^{\frac12}\\&\quad\cdot\left(\int(\sup_{y_n}|h(2^p(x_n-y_n))|)^2dx_n\right)^{\frac12}\\&\leqslant C2^{p/2}\|u_{p,q}\|_{L^2(L^1)}.\end{aligned}$$

即证得(3.1.21).

最后我们来看

定理 3.1.10 若 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，并定义函数

$$\rho(s,s')=\begin{cases}\min\left\{s+s'-\dfrac n2,s-\dfrac12\right\}, & 当\ s'\neq\dfrac{n-1}{2},\\ s-\dfrac12-\varepsilon, & 当\ s'=\dfrac{n-1}{2},\end{cases}$$

那么 $u\in C^\rho(\mathbf{R}^n)$，其中 $\rho=\rho(s,s')$，ε 是任意小的正数.

证 记 $u_p=\Delta_pu$，进一步分解

$$u_p=\sum_{p'\geqslant-1}\Delta_{p'}u_p=\sum_{p'\geqslant-1}\Delta_{p,p'}u.$$

注意当 $p'>p+N$ 时($N>\ln\kappa/\ln 2$)，因

$$\text{supp}\,\varphi_p(\xi)\cap\text{supp}\,\varphi'_{p'}(\xi')=\varnothing,$$

就有 $\Delta_{p,p'}u=0$，所以 $u_p=\sum_{p'=-1}^{p+N}\Delta_{p,p'}u$. 并且由引理 3.1.8 有

$$\begin{aligned}\|u_p\|_{L^\infty}&\leqslant\sum_{p'\leqslant p+N}\|\Delta_{p,p'}u\|_{L^\infty}\\&\leqslant C\sum_{p'\leqslant p+N}2^{\frac{n-1}{2}p'+\frac12p}\|\Delta_{p,p'}u\|_0\\&\leqslant C\sum_{p'\leqslant p+N}2^{-(s'-\frac{n-1}{2})p'-(s-\frac12)p}\varepsilon_{p,p'}\\&\leqslant\begin{cases}C2^{-p(s-\frac12)}\varepsilon_p, & 当\ s'>\dfrac{n-1}{2},\\ C2^{-p(s-\frac12-\varepsilon)}\varepsilon_p, & 当\ s'=\dfrac{n-1}{2},\\ C2^{-p(s+s'-\frac n2)}\varepsilon_p, & 当\ s'<\dfrac{n-1}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$，$\{\varepsilon_p\}\in l^2(\mathbf{N})$，$\varepsilon$ 为任意小正常数. 由定义 2.1.9 及 $\rho=\rho(s,s')$ 定义知 $u\in C^\rho(\mathbf{R}^n)$. 定理证毕.

定义 3.1.11 对 $m,m'\in\mathbf{R}$，若 $\sigma(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，且对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$，存在 $C>0$，使对所有 $(x,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 有

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)|\leqslant C\langle\xi\rangle^{m+\alpha_n-\beta_n}\langle\xi'\rangle^{m'+|\alpha'|-|\beta'|},\tag{3.1.22}$$

则称 $\sigma\in S^{m,m'}_{1,1}$.

与 $S^m_{1,1}$ 类一样，$S^{m,m'}_{1,1}$ 是拟微分算子的坏类，一般而言没有 L^2 的有界性，但我们有

定理 3.1.12 若 $\sigma(x,\xi)\in S^{m,m'}_{1,1}$，那么当 $s>m$，$s'>m'$ 时，$\sigma(x,D)$ 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^{s-m}_{s'-m'}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子.

在证明定理 3.1.12 前，我们需要先证明以下引理：

引理 3.1.13 若 $A(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，其支集在 $|\xi|\leqslant r$ 中，且对所有 $(x,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 以及满足 $|\beta|\leqslant[n/2]+1$ 的重指标 β 有

$$|\partial_\xi^\beta A(x,\xi)|\leqslant Mr^{-|\beta|},\tag{3.1.23}$$

则对任意 $f(x)\in\mathscr{S}$ 及以 $A(x,\xi)$ 为象征的算子 $A(x,D)$ 有

$$\|Af\|_0^2\leqslant CM^2\|f\|_0^2.\tag{3.1.24}$$

证 1) 先证 $r=1$ 的情形. 记 $n_1=[n/2]+1$，

$$g(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}A(x,\xi)\hat f(\xi)d\xi.$$

由 Schwartz 不等式有

$$
\begin{aligned}
|g(x)|^2 &= (2\pi)^{-2n}\left|\iint e^{i(x-y)\xi}A(x,\xi)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\right|^2 \\
&\leqslant C\Big(\int\langle x-y\rangle^{-2n_1}|f(y)|^2\mathrm{d}y\Big) \\
&\quad\cdot\Big(\int\Big|\langle x-y\rangle^{n_1}\int e^{i(x-y)\xi}A(x,\xi)\mathrm{d}\xi\Big|^2\mathrm{d}y\Big) \\
&\leqslant C\Big(\int\langle x-y\rangle^{-2n_1}|f(y)|^2\mathrm{d}y\Big) \\
&\quad\cdot\Big(\int\Big|\sum_{|\alpha|\leqslant n_1}C_\alpha\int e^{i(x-y)\xi}\partial_\xi^\alpha A(x,\xi)\mathrm{d}\xi\Big|^2\mathrm{d}y\Big).
\end{aligned}
$$

因为 $A(x,\xi)$ 关于 ξ 的支集在 $|\xi|\leqslant 1$ 中，故由(3.1.23)式和 Parseval 等式我们得到

$$
|g(x)|^2\leqslant CM^2\int\langle x-y\rangle^{-2n_1}|f(y)|^2\mathrm{d}y,
$$

两边对 x 积分即证得(3.1.24)式.

2) 若 $r>1$，则令 $B(y,\eta)=A(r^{-1}y,r\eta)$，显然 $B(y,\eta)$ 的支集在 $|\eta|\leqslant 1$ 中，并且满足 $|\partial_\eta^\beta B(x,\eta)|\leqslant M$. 另一方面

$$
\begin{aligned}
\|Af\|_0^2 &= \int\Big|(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}A(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\Big|^2\mathrm{d}x \\
&= \int\Big|(2\pi)^{-n}\int e^{iy\eta}B(y,\eta)\hat{f}(r\eta)r^n\mathrm{d}\eta\Big|^2 r^{-n}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

由 1)的证明知

$$
\|Af\|_0^2\leqslant CM^2\int|\hat{f}(r\eta)r^n|^2r^{-n}\mathrm{d}\eta = CM^2\|f\|_0^2.
$$

则引理得证.

定理 3.1.12 之证明 利用环形分解可写

$$
\sigma(x,\xi)=\sum_{p,p'}\sigma_{p,p'}(x,\xi),
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\sigma_{p,p'}(x,\xi) &= \varphi(2^{-p}\xi)\varphi'(2^{-p'}\xi')\sigma(x,\xi) \quad (p,p'\geqslant 0), \\
\sigma_{p,-1}(x,\xi) &= \varphi(2^{-p}\xi)\psi'(\xi')\sigma(x,\xi), \\
\sigma_{-1,p'}(x,\xi) &= \psi(\xi)\varphi'(2^{-p'}\xi')\sigma(x,\xi), \\
\sigma_{-1,-1}(x,\xi) &= \psi(\xi)\psi'(\xi')\sigma(x,\xi).
\end{aligned}
$$

设 $u\in H_{s'}^s(\mathbf{R}^n)$，在积分号下求导有

$$
\partial_{x_j}(\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})u(x))=(2\pi)^{-2n}\int e^{ix\xi}(i\xi_j+\partial_{x_j})\sigma_{p,p'}(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.
$$

一般地对重指标 α,β 有

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta(\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})u(x)) \\
&= (2\pi)^{-2n}\int e^{ix\xi}(i\xi+\partial_x)^\alpha(i\xi'+\partial_{x'})^\beta\sigma_{p,p'}(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

作 $\varphi_1(\xi)\in C_0^\infty$，使 $\varphi_1(\xi)|_{\mathrm{supp}\,\varphi}=1$，且使

$$
\mathrm{supp}\,\varphi_1\subset\{\mu^{-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2\mu\}\quad(\mu>\kappa).
$$

再令 $\tilde{u}_{p,p'}(\xi)=\varphi_1(2^{-p}\xi)\varphi_1'(2^{-p'}\xi')\hat{u}(\xi)$. 对以

$$
(i\xi+\partial_x)^\alpha(i\xi'+\partial_{x'})^\beta\sigma_{p,p'}(x,\xi)
$$

为象征的算子用引理 3.1.13，就有

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta(\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})u(x))\|_0 \\
&\leqslant C_{\alpha,\beta}2^{p(m+\alpha_n)+p'(m'+|\alpha'|+|\beta|)}\|\tilde{u}_{p,p'}(\xi)\|_0 \\
&\leqslant C_{\alpha,\beta}2^{p(m+\alpha_n-s)+p'(m'+|\alpha'|+|\beta|-s')}\varepsilon_{p,p'},
\end{aligned}
$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$. 由 $\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})$ 的定义知 $p'>p+N$ 时 $\sigma_{p,p'}(x,\xi)=0$. 所以我们总可设 $p'\leqslant p+N$，故有

$$
\|\partial_x^\alpha\partial_{x'}^\beta(\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})u(x))\|_0\leqslant C_{\alpha,\beta}2^{p(m+|\alpha|-s)+p'(m'+|\beta|-s')}\varepsilon_{p,p'}.
$$

所以由定理 3.1.7 有

$$
\sigma(x,\mathrm{D})u(x)=\sum_{p,p'}\sigma_{p,p'}(x,\mathrm{D})u(x)\in H_{s'-m'}^{s-m}(\mathbf{R}^n).
$$

3.2 切向仿微分算子

在 1.4 节中我们用两种形式导出仿积的概念. 其形式之一是

$$
T_a u=\sum_q(S_q a)\Delta_q u, \tag{3.2.1}
$$

其中 $S_q a=\sum_{p=-1}^{q-N_0}\Delta_p a$，$N_0$ 是在第 2 章指出的一个充分大的自然数. 在本节，我们把 x_n 看做参量，仅对 x' 定义“仿乘积”(我们不妨称之为切向仿乘积). 其形式为

$$T'_a u = \sum_q (S'_q a)\Delta'_q u, \qquad (3.2.2)$$

其中 $S'_q a = \sum_{p=-1}^{q-N_0} \Delta'_p a$. 另外，我们还定义双指标的仿乘积算子

$$\Pi_a u = \sum_{q,q'} S_{q,q'} a \Delta_{q,q'} u, \qquad (3.2.3)$$

这里 $S_{q,q'} = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0,\ -1\leqslant p'\leqslant q'-N_0} \Delta_{p,p'} a$.

本节的目的是讨论算子 T'_a 的性质，但正如我们后面将看到的，算子 T'_a 的讨论必须借助于算子 Π_a 的性质. 所以我们先考虑

定理 3.2.1 *若 $a\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)$ $(t>1/2,\ t+t'>n/2)$，那么 Π_a 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子.*

证 首先我们注意到，当 N_0 充分大时

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}(S_{q,q'} a \Delta_{q,q'} u)^\wedge \\
&\subset \{|\xi| \leqslant \kappa 2^{q-N_0+1},\ |\xi'| \leqslant \kappa 2^{q'-N_0+1}\} \\
&\quad + \{\kappa^{-1}2^q \leqslant |\xi| \leqslant \kappa 2^{q+1},\ \kappa^{-1}2^{q'} \leqslant |\xi'| \leqslant \kappa 2^{q'+1}\} \\
&\subset \{\mu^{-1}2^q \leqslant |\xi| \leqslant \mu 2^{q+1},\ \mu^{-1}2^{q'} \leqslant |\xi'| \leqslant \mu 2^{q'+1}\} \\
&= \widetilde{C}_{q,q'}.
\end{aligned}$$

这里 μ 是大于 κ 的常数，$\widetilde{C}_{q,q'}$ 是包含 $C_{q,q'}$ 的双指标环. 而

$$\| S_{q,q'} a \Delta_{q,q'} u \|_0 \leqslant \| S_{q,q'} a \|_{L^\infty} \| \Delta_{q,q'} u \|_0.$$

类似引理 3.1.6 的证明作 $\alpha(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，$\beta(\xi_n)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，使

$$\alpha(2^{-q'}\xi')\,|_{\operatorname{supp}(S_{q,q'}a)^\wedge} = 1, \qquad \beta(2^{-q}\xi_n)\,|_{\operatorname{supp}(S_{q,q'}a)^\wedge} = 1,$$

并设 $\hat{g}=\alpha$，$\hat{h}=\beta$，则

$$\begin{aligned}
|S_{q,q'} a| &= \left| 2^{(n-1)q'+q} \int a(y) g(2^{q'}(x'-y')) h(2^q(x_n-y_n))\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_n \right| \\
&\leqslant \| a \|_{L^\infty} \| g \|_{L^1(x')} \| h \|_{L^1(x_n)} \\
&\leqslant C \| a \|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

由 $a\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)$，且 $t>1/2$，$t+t'>n/2$ 知 $a\in L^\infty$，故 $\| S_{q,q'} a \|_{L^\infty} \leqslant C$. 若 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，则 $\| S_{q,q'} a \Delta_{q,q'} u \|_0 \leqslant C 2^{-sq-s'q'} \varepsilon_{q,q'}$. 由推论 3.1.5 知 $\Pi_a u \in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，定理证毕.

注 从定理证明中可以看到，定理中对 a 仅需设 $a\in L^\infty$ 且可对 a 作 Fourier 变换即可. 例如限制 $a\in L^\infty$ 且具紧支集，第 2 章中对 a

所加的限制即此.

定理 3.2.2 *若 $a\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)$ $(t>1/2,\ t+t'>n/2)$，那么当 $-t<s\leqslant t$ 时，T'_a 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子，并且 $\Pi_a - T'_a$ 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子，这里 $\rho=\rho(t,t')$ $(\rho(t,t')$ 的定义见定理 3.1.10，以下不再一一声明).*

证 1) 实际上我们只需证 $\Pi_a - T'_a$ 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子. 因为由这一结论再加上定理 3.2.1 即知 T'_a 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 到自身的有界算子. 考虑

$$\begin{aligned}
(T'_a - \Pi_a)u &= \sum_q S'_q a \Delta'_q u - \sum_{p,q} S_{p,q} a \Delta_{p,q} u \\
&= \sum_q \Big(\sum_p \Delta_p S'_q a\Big)\Big(\sum_l \Delta_l \Delta'_q u\Big) - \sum_{p,q} S_{p,q} a \Delta_{p,q} u \\
&= \sum_{p,q} (\Delta_p S'_q a)(S_{p+2N_0} \Delta'_q u) \\
&= \sum_{p,q} w_{p,q},
\end{aligned}$$

而 $\| w_{p,q} \|_0 \leqslant \| \Delta_p S'_q a \|_{L^\infty(L^2)} \cdot \| S_{p+2N_0} \Delta'_q u \|_{L^2(L^\infty)}$. 下面分别估计这两个因子. 由引理 3.1.8 有

$$\begin{aligned}
\| \Delta_p S'_q a \|_{L^\infty(L^2)} &\leqslant C \sum_{p'\leqslant q-N_0} 2^{p'(n-1)/2} \| \Delta_{p,p'} a \|_0 \\
&\leqslant C \sum_{p'\leqslant q-N_0} 2^{-p'(t'-\frac{n-1}{2})-pt} \varepsilon_{p,p'} \\
&\leqslant \begin{cases}
C 2^{-p'(t'-\frac{n-1}{2})-pt} \varepsilon_{p,p'}, & \text{若 } t' < \dfrac{n-1}{2}, \\
C 2^{-pt+q\varepsilon} \varepsilon_{p,p'}, & \text{若 } t' = \dfrac{n-1}{2}, \\
C 2^{-pt} \varepsilon_{p,p'}, & \text{若 } t' > \dfrac{n-1}{2};
\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| S_{p+2N_0} \Delta'_q u \|_{L^2(L^\infty)} &\leqslant C \sum_{q-N\leqslant h\leqslant p-N_0} 2^{h/2} \| \Delta_{h,q} u \|_0 \\
&\leqslant C \sum_{q-N\leqslant h\leqslant p-N_0} 2^{-h(s-\frac{1}{2})-qs'} \varepsilon_{h,q}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \begin{cases} C2^{-q(s-\frac{1}{2}+s')}\varepsilon_{p,q}, & 若\ s > \frac{1}{2}, \\ C2^{-p(s-\frac{1}{2})-qs'}\varepsilon_{p,q}, & 若\ s < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

当 $t' \neq (n-1)/2$, $s \neq 1/2$ 时有

$$\| w_{p,q} \|_0 \leqslant 2^{-p(t+(s-\frac{1}{2})^-)+q(s'+(t'-\frac{n-1}{2})^-+(s-\frac{1}{2})^+)}\varepsilon_{p,q}, \quad \{\varepsilon_{p,q}\} \in l^2(\mathbf{N}^2).$$

这里用到记号

$$(a)^+ = \begin{cases} a, & 当\ a > 0, \\ 0, & 当\ a \leqslant 0, \end{cases}$$

$$(a)^- = \begin{cases} 0, & 当\ a \geqslant 0, \\ a, & 当\ a < 0. \end{cases}$$

又设 $s > -t+1/2$, 那么 $t+(s-1/2)^- > 0$. 同时我们知道

$$\operatorname{supp} \hat{w}_{p,q} \subset \{ |\xi| \leqslant \mu 2^{p+1},\ \mu^{-1}2^q \leqslant |\xi'| \leqslant \mu 2^{q+1} \},$$

由定理 3.1.6 知 $\sum w_{p,q} \in H^{\tau}_{\tau'}(\mathbf{R}^n)$, 其中

$$\tau = t + (s-\frac{1}{2})^-, \quad \tau' = s' + (t'-\frac{n-1}{2})^- + (s-\frac{1}{2})^+.$$

注意到 $t-s+(s-1/2)^- \geqslant 0$, 由定理 3.1.2 即知 $\sum w_{p,q} \in H^s_{s'+\sigma}(\mathbf{R}^n)$, 这里

$$\sigma = t - s + (s-\frac{1}{2})^- + (t'-\frac{n-1}{2})^- + (s-\frac{1}{2})^+$$

$$= (t'-\frac{n-1}{2})^- + t - \frac{1}{2}$$

$$= \min\left\{ t-\frac{1}{2}, t+t'-\frac{n}{2} \right\}.$$

当 $s=1/2$ 时, 由 $t>1/2$ 知 $t>s$, 故不妨认为 $u \in H^{s-\varepsilon}_{s'+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$. 由于 $s-\varepsilon<1/2$, 用 $s-\varepsilon$ 代替 s, $s'+\varepsilon$ 代替 s', 可得

$$u \in H^{t+s-\varepsilon-1/2}_{s'+\varepsilon+(t'-(n-1)/2)^-}(\mathbf{R}^n).$$

取 ε 充分小, 可使 $t-1/2-\varepsilon>0$, 故有 $\sum w_{p,q} \in H^s_{s'+\sigma}(\mathbf{R}^n)$, 这时

$$\sigma = \varepsilon + (t'-\frac{n-1}{2})^- + t - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

$$= \min\left\{ t-\frac{1}{2}, t+t'-\frac{n}{2} \right\}.$$

当 $s'=(n-1)/2$ 时, 同上讨论仅能得 $\sum w_{p,q} \in H^s_{s'+\sigma_1}(\mathbf{R}^n)$, 这里

$$\sigma_1 = (s-\frac{1}{2})^+ + t - s + (s-\frac{1}{2})^- - \varepsilon$$

$$= t - \frac{1}{2} - \varepsilon = \rho(t,t').$$

所以也有 $\sum w_{p,q} \in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

2) 下面我们还需将条件 $s>-t+1/2$ 减弱到 $s>-t$. 这时不能再用定理 3.1.6 之 1), 而可以对 $\sum w_{p,q}$ 作重新分解. 考虑 $\Delta_k \sum w_{p,q}$, 用引理 3.1.9 有

$$\| \Delta_k \sum_{p,q} w_{p,q} \|_0 \leqslant C2^{k/2} \| \Delta_k \sum_{p,q} w_{p,q} \|_{L^2(L^1)}$$

$$= C2^{k/2} \| \Delta_k \sum_{p,q} \Delta_p S'_q a S_{p+2N_0} \Delta'_q u \|_{L^2(L^1)}.$$

对任意的 q, 当 $s+t>0$ 时, 有

$$\| \Delta_k \sum_{p \geqslant k-2N_0} \Delta_p S'_q a S_{p+2N_0} \Delta'_q u \|_{L^2(L^1)}$$

$$\leqslant \begin{cases} C2^{-k(s+t)-q(s'+t'-\frac{n-1}{2})}\varepsilon_{k,q}, & 若\ t' < \frac{n-1}{2}, \\ C2^{-k(s+t)-q(s'-\varepsilon)}\varepsilon_{k,q}, & 若\ t' = \frac{n-1}{2}, \\ C2^{-k(s+t)-qs'}\varepsilon_{k,q}, & 若\ t' > \frac{n-1}{2}, \end{cases}$$

这里 $\{\varepsilon_{k,q}\} \in l^2(\mathbf{N}^2)$. 由引理 3.1.5 知

$$\sum_{k,q} (\Delta_k \sum_{k \leqslant p+N_0} \Delta_p S'_q a S_{p+2N_0} \Delta'_q u) \in H^{s+t-1/2}_{\sigma_2}(\mathbf{R}^n),$$

其中 $\sigma_2 = s' + (t'-\frac{n-1}{2})^*$, 而

$$(a)^* = \begin{cases} a, & 当\ a<0, \\ -\varepsilon, & 当\ a=0, \\ 0, & 当\ a>0. \end{cases}$$

再注意 $H^{s+t-1/2}_{\sigma_2}(\mathbf{R}^n)\subset H^s_{t-1/2+\sigma_2}(\mathbf{R}^n)=H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，知 $\sum w_{p,q}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$. 故定理证毕.

定理 3.2.3 若 $a\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)\ (t>1/2,\ t+t'>n/2)$，那么当 $-(t+t'-1/2)<s'\leqslant(t+t'-1/2)$ 时，T_a：$H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)\to H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$ 是有界的. 并且当 $-(t+t'-1/2)<s'\leqslant(n-1)/2$ 时，$T_a-\Pi_a$：$H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)\to H^s_{s'+(t+t'-n/2)}(\mathbf{R}^n)$ 是有界算子.

证 与定理 3.2.2 的证明相同，只需证定理的后半部分. 考虑

$$
\begin{aligned}
(T_a-\Pi_a)u&=\sum_p S_pa\Delta_pu-\sum_{p,q}S_{p,q}a\Delta_{p,q}u\\
&=\sum_p\Big(\sum_q\Delta_q'S_pa\Big)\Big(\sum_l\Delta_l'\Delta_pu\Big)-\sum_{p,q}S_{p,q}a\Delta_{p,q}u\\
&=\sum_{p,q}\Delta_q'S_paS'_{q+2N_0}\Delta_pu=\sum_{p,q}v_{p,q},
\end{aligned}
$$

而

$$\|v_{p,q}\|_0\leqslant\|\Delta_q'S_pa\|_{L^2(L^\infty)}\|S'_{q+2N_0}\Delta_pu\|_{L^\infty(L^2)}.$$

由引理 3.1.8 有

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_q'S_pa\|_{L^2(L^\infty)}&\leqslant C\sum_{q-N_0\leqslant h\leqslant p-N_0}2^{h/2}\|\Delta_q'\Delta_ha\|_0\\
&\leqslant C\sum_{q-N_0\leqslant h\leqslant p-N_0}2^{-(t-\frac12)h-qt'}\varepsilon_{h,q}\\
&\leqslant C2^{-q(t+t'-\frac12)}\varepsilon_q,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|S'_{q+2N_0}\Delta_pu\|_{L^\infty(L^2)}&\leqslant C\sum_{h\leqslant q+2N_0}2^{h\frac{n-1}{2}}\|\Delta_h'\Delta_pu\|_0\\
&\leqslant C\sum_{h\leqslant q+2N_0}2^{h(\frac{n-1}{2}-s')-ps}\varepsilon_{p,h}\\
&\leqslant C2^{-q(s'-\frac{n-1}{2})^*-ps}\varepsilon_p,
\end{aligned}
$$

这里

$$
(a)^*=\begin{cases}a, & \text{当 } a<0,\\ -\varepsilon, & \text{当 } a=0,\\ 0, & \text{当 } a>0.\end{cases}
$$

综合以上三式有

$$\|v_{p,q}\|_0\leqslant C2^{-ps-q(t+t'-\frac12+(s'-\frac{n-1}{2})^*)}\varepsilon_{p,q},$$

其中 $\{\varepsilon_{p,q}\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$. 若 $s'>-(t+t'-n/2)$，由于

$$t+t'-\frac12+(s'-\frac{n-1}{2})^*>0,$$

而且

$$\operatorname{supp}\hat v_{p,q}\subset\{\mu^{-1}2^p\leqslant|\xi|\leqslant\mu 2^{p+1},\ |\xi'|\leqslant\mu2^{q+1}\}.$$

由定理 3.1.6 之 2)，我们有 $\sum v_{p,q}\in H^s_{t+t'-1/2+(s'-(n-1)/2)^*}(\mathbf{R}^n)$. 当 $s'<(n-1)/2$ 时就有 $\sum v_{p,q}\in H^s_{s'+(t+t'-n/2)}(\mathbf{R}^n)$. 当 $s'\geqslant(n-1)/2$ 时，由 $s'\leqslant t+t'-1/2$ 与 $t+t'>n/2$ 知 $\sum v_{p,q}\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$.

下面我们将条件 $s'>-(t+t'-n/2)$ 减弱为 $s'>-(t+t'-1/2)$. 与定理 3.2.2 的证明一样，对 $\sum v_{p,q}$ 重新作分解，并用引理 3.1.9 知当 $s'>-(t+t'-1/2)$ 且 $s'<(n-1)/2$ 时 $\sum v_{p,q}\in H^s_{s'+(t+t'-n/2)}(\mathbf{R}^n)$. 当 $s'>-(t+t'-1/2)$ 且 $s'\geqslant(n-1)/2$ 时，$\sum v_{p,q}\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$. 定理证毕.

从切向仿积的定义(3.2.2)中可以看到，T_a' 的定义依赖于定义中 N_0 以及环形分割中的 κ 及单位分解的函数 $\varphi'(\xi')$ 的选取，所以，要使 T_a' 的定义是合理的，必须证明同一个函数 a，但不同的 (N_0,φ',κ) 的选择所定义的不同的仿积在相差一个"正则"算子的意义下是一致的. 具体地说，记 (N_0,φ',κ) 的另一选择 (M_0,η',λ) 所定义的仿积为 $\tilde T_a'$，我们想证明：

定理 3.2.4 若 $a\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)\ (t>1/2,\ t+t'>n/2)$，并且 $-t<s\leqslant t$，$T_a'-\tilde T_a'$：$H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)\to H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$ 是有界算子，这里 $\tau=t+t'-n/2$.

为证明这一定理我们先做以下准备.

引理 3.2.5 设 $A_q\in C^\infty$ 且满足 $\operatorname{supp}\hat A_q\subset\{(\xi',\xi_n);\ |\xi'|\leqslant M2^q\}$ 及 $\|\Delta_k(A_q-a)\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-qr}\varepsilon_{k,q}$，$\{\varepsilon_{k,q}\}\in l^2(\mathbf{N}^n)$，又设 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，并记 u 相对于 (η',λ) 的环形分解为 $u=\sum_{p'}v_{p'}$，那么当 M_0 充分大

时有 $R=T_a'u-\sum\limits_{p'}A_{p'-M_0}v_{p'}\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$.

证 1) 先由 T_a' 的定义可写

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{p'}\Big[\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a(\Delta_{p'}u-v_{p'})+\Big(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-A_{p'-M_0}\Big)v_{p'}\Big] \\
&= \sum_q\Big[\Delta_q'a\sum_{p'\geqslant q-N_0}(\Delta_{p'}'u-v_{p'})\Big]+\sum_{p'}(S_{p'}'a-A_{p'-M_0})v_{p'} \\
&= R_1+R_2.
\end{aligned}
$$

记 $w_q=\sum_{p'\geqslant q-N_0}(\Delta_{p'}'u-v_{p'})$, 那么

$$
\operatorname{supp}\hat{w}_q\subset\{\mu^{-1}2^{q+N_0}\leqslant|\xi'|\leqslant\mu2^{q+N_0+1}\},
$$

这里 μ 是一适当常数(一般而言较 κ 与 λ 大), 若必要的话可取更大的 μ 与 N_0 使 $(\Delta_q'a)w_q$ 谱的支集也在 $\{\mu^{-1}2^{q+N_0}\leqslant|\xi'|\leqslant\mu2^{q+N_0+1}\}$ 中. 下面分别估计 R_1,R_2,R_3.

2) 由简单的计算知

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \sum_q\Big(\sum_p\Delta_p\Delta_q'a\Big)\Big(\sum_l\Delta_lw_q\Big) \\
&= \sum_{p,q}(S_p\Delta_q'a)(\Delta_pw_q)+\sum_{p,q}(\Delta_{p,q}a)(S_{p+2N_0}w_q) \\
&= R_{1,1}+R_{1,2}.
\end{aligned}
$$

这时 $(S_p\Delta_q'a)(\Delta_pw_q)$ 谱的支集含于

$$
\{\mu^{-1}2^{q+N_0}\leqslant|\xi'|\leqslant\mu2^{q+N_0+1},\ \kappa^{-1}2^p\leqslant|\xi_n|\leqslant\kappa2^{p+1}\}
$$

中, 且

$$
S_p\Delta_q'a=\sum_{l\leqslant p-N_0}\Delta_l\Delta_q'a=\sum_{q-N\leqslant l\leqslant p-N_0}\Delta_{l,q}a
$$

$(N=[\ln\kappa/\ln 2]+1)$. 所以

$$
\begin{aligned}
&\|(S_p\Delta_q'a)(\Delta_pw_q)\|_0 \\
&\leqslant\|S_p\Delta_q'a\|_{L^\infty}\|\Delta_pw_q\|_0 \\
&\leqslant C\Big(\sum_{q-N\leqslant l\leqslant p-N_0}2^{-(t-\frac12)l-(t'-\frac{n-1}{2})q}\varepsilon_{l,q}\Big)(2^{-sp-s'q}\varepsilon_{p,q}) \\
&\leqslant C2^{-sp-q(s'+\tau)}\varepsilon_{p,q},
\end{aligned}
$$

其中 $\{\varepsilon_{p,q}\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$. 所以 $R_{1,1}\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$. 对 $R_{1,2}$ 类似地有

$$
S_{p+2N_0}w_q=\sum_{q-\tilde{N}\leqslant l\leqslant p+N_0}\Delta_lw_q,
$$

(这里 $\tilde{N}$ 是与 κ 及 λ 有关的常数). 但这时的谱的支集含于

$$
\{\mu^{-1}2^{q+N_0}\leqslant|\xi'|\leqslant\mu2^{q+N_0+1},\ |\xi_n|\leqslant\mu2^{p+N_0}\}
$$

中, 而且不能用引理 3.1.6 (引理 3.1.6 需加上条件 $s>-t+1/2$, 但本引理条件仅有 $s>-t$). 故需采用定理 3.2.2 的证明中 2)的方法. 记 $w_{p,q}=\Delta_{p,q}aS_{p+2N_0}w_q$, 考虑 $\Delta_k(\sum w_{p,q})$, 由引理 3.1.9 对任意取定的 q 有

$$
\Big\|\Delta_k\sum_pw_{p,q}\Big\|_0\leqslant C2^{k/2}\Big\|\Delta_k\sum_pw_{p,q}\Big\|_{L^2(L^1)}.
$$

当 $s+t>0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\Big\|\Delta_k\sum_pw_{p,q}\Big\|_{L^2(L^1)}&=\Big\|\Delta_k\sum_p\Delta_{p,q}aS_{p+2N_0}w_q\Big\|_{L^2(L^1)} \\
&\leqslant C2^{-(t+s)k-(t'+s'-\frac{n+1}{2})q}\varepsilon_{k,q},
\end{aligned}
$$

其中 $\{\varepsilon_{k,q}\}\in l^2(\mathbf{N}^2)$. 所以 $R_{1,2}\in H^{s+t-1/2}_{s'+t'-(n-1)/2}(\mathbf{R}^n)\subset H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$. 也就有 $R_1\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$.

3) 对 R_2, 取 N_0,M_0 充分大, 使 $(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-A_{p'-M_0})v_{p'}$ 的谱的支集含于一个适当的环 $C_{p'}$ 中, 而 $\Delta_k(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-A_{p'-M_0})v_{p'}$ 的谱的支集含于双指标环 $C_{k,p'}$ 中(以下总设 $k>p'-N$, 否则 $C_{k,p'}=\varnothing$), 并且

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\Delta_k\Big(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-A_{p'-M_0}\Big)v_{p'}\Big\|_0 \\
&\leqslant C\Big\|\Delta_k\Big(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-a\Big)v_{p'}\Big\|_0+C\|\Delta_k(a-A_{p'-M_0})v_{p'}\|_0.
\end{aligned}
$$

注意 $k>p'-N$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\Delta_k\Big(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q'a-a\Big)\Big\|_{L^\infty} \\
&\leqslant\sum_{q>p'-N_0}\|\Delta_k\Delta_q'a\|_{L^\infty}\leqslant\sum_{q>p'-N_0}2^{-(t-\frac12)k-(t'-\frac{n-1}{2})q}\varepsilon_{k,q} \\
&\leqslant C\sum_{q>p'-N_0}2^{-q\tau}\varepsilon_{k,q}\leqslant C2^{-p'\tau}\varepsilon_{k,p'}.
\end{aligned}
$$

而由引理条件知$\|\Delta_k(a-A_{p'-M_0})\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-p'\tau}\varepsilon_{k,p'}$，所以

$$\left\|\Delta_k\Big(\sum_{q\leqslant p'-N_0}\Delta_q' a-A_{p'-M_0}\Big)v_{p'}\right\|_0\leqslant C2^{-ks-p'(s'+\tau)}\varepsilon_{kp'},$$

即$R_2\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$. 引理证毕.

容易看到，定理 3.2.4 是引理 3.2.5 的简单推论，这是因为容易验证 $\widetilde{T}_a'u=\sum_{p'}\widetilde{S}_{p'}'a\widetilde{\Delta}_{p'}u$ 中$\widetilde{S}_{p'}'a$ 适合 $A_{p'-M_0}$的条件，而 $\widetilde{\Delta}_{p'}u$ 正是 u 的另一分解.

切向仿积算子也有相应的算子演算，其中最重要是仿积的复合. 对此我们有

定理 3.2.6 *设 $a,b\in H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)(t>1/2,\ t+t'>n/2)$，则当 $-t<s\leqslant t$ 时 $R=T_a'\circ T_b'-T_{ab}'$ 是 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$到 $H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$的有界算子.*

证 设 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，那么由定理 3.2.2 知 $T_b'u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$. 并且按仿积定义有

$$T_a'T_b'u=\sum_{p'}S_{p'}'a\Delta_{p'}(T_b'u)=\sum_{p'}S_{p'}'a\Delta_{p'}\Big(\sum_q S_q'b\Delta_q u\Big).$$

注意到 $\Delta_{p'}(T_b'u)$是 $T_b'u$ 的一个分解，而 $S_q'b\Delta_q u$ 是 $T_b'u$ 的另一分解. 由引理 3.2.5 知这两分解在上式中在相差一个"正则"算子意义下是可互换的. 故有

$$T_a'T_b'u=\sum_{p'}S_{p'}'a\,S_{p'}'b\Delta_{p'}u+R_1. \tag{3.2.4}$$

其中 $R_1\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$. 再令 $c_{p'}=(S_p'a)(S_p'b)$，那么 $c_{p'}$谱的支集在$\{(\xi',\xi_n);\ |\xi'|\leqslant M2^{p'}\}$中. 并且

$$c_{p'}-ab=\sum_{q_1\geqslant p'-N_0\text{或}q_2\geqslant p'-N_0}(\Delta_{q_1}'a)(\Delta_{q_2}'b),$$

所以对 $k>p'-N$ 有

$$\begin{aligned}&\|\Delta_k(c_{p'}-ab)\|_{L^\infty}\\&\leqslant\sum_{q_1\geqslant p'-N_0\text{或}q_2\geqslant p'-N_0}\|\Delta_k(\Delta_{q_1}'a\,\Delta_{q_2}'b)\|_{L^\infty}\\&\leqslant\sum_{q_1+q_2\geqslant p'-N_0}\Big(\sum_{\substack{p_1>q_1-N,\\p_2>q_2-N,\\p_1+p_2\geqslant k-N}}\|\Delta_k(\Delta_{p_1,q_1}a\,\Delta_{p_2,q_2}b)\|_{L^\infty}\Big)\\&\leqslant\sum_{q_1+q_2\geqslant p'-N_0}\Big(\sum_{\substack{p_1+p_2>q_1+q_2-2N,\\p_1+p_2\geqslant k-N}}2^{-(p_1+p_2)(t-\frac12)-(q_1+q_2)(t'-\frac{n-1}{2})}\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{q_2}\Big)\\&\leqslant C\sum_{q_1+q_2\geqslant p'-N_0}2^{-(q_1+q_2)(t+t'-\frac n2)}\varepsilon_{q_1,q_2}\varepsilon_k\\&\leqslant C2^{-p'\tau}\varepsilon_{k,p'}.\end{aligned}$$

故可再一次用引理 3.2.5 有

$$\sum_{p'}c_{p'}\Delta_{p'}u=T_{ab}'u+R_2. \tag{3.2.5}$$

其中 $R_2\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n)$，由(3.2.4),(3.2.5)即知

$$Ru=(T_a'\circ T_b'-T_{ab}')u=R_1+R_2\in H^s_{s'+\tau}(\mathbf{R}^n).$$

则定理证毕.

与第 2 章一样，在定义了切向仿乘积以后，自然要考虑切向仿微分算子. 怎样来定义切向仿微分算子才是合理的呢? 注意到仿微分算子实质上是仿乘积算子与拟微分算子的复合. 而拟微分算子也是定义在开集上的，在带边的区域上只能定义切向拟微分算子，这时在边界的法向方向上只能有微分算子. 所以下面我们定义的切向仿微分算子实质上是切向仿乘积算子与切向拟微分算子的复合.

我们先从具齐次象征的切向仿微分算子着手. 以下为方便起见，我们记 $x=(z,y)$，$z\in\mathbf{R}^1$，$y\in\mathbf{R}^{n-1}$，y 的对偶变量记为 η. 设 $l(z,y,\eta)$是定义在$[0,T]\times\mathbf{R}^{n-1}\times(\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\})$上的函数，对$(z,y)$属于 $H^t_{t'}(\mathbf{R}^n)$，$t>1/2$，$t+t'>n/2$，且对 y 具紧支集，对 η 是 C^∞函数且是 η 的 m 次齐次函数. 这样的函数之集记为 $l^m_{t,t'}$. 由定理 3.1.10 知 $l^m_{t,t'}$中的元素对(z,y)属于 $C^\rho(\mathbf{R}^n)$，$\rho=\rho(t,t')$. 所以 $l^m_{t,t'}$也可以理解为含有参变量 z 的 l^m_ρ 类. 类似于定义 2.3.7 我们定义切向仿微分算子为

定义 3.2.7 *若 $l(z,y,\eta)\in l^m_{t,t'}$，$u(z,y)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则以 $l(z,y,\eta)$为象征的切向仿微分算子 T_l'定义如下：*

$$(T_l'u)^\wedge=(2\pi)^{-(n-1)}\int\chi(\eta-\xi,\xi)\hat{l}(z,\eta-\xi,\xi)S(\xi)\hat{u}(z,\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{3.2.6}$$

其中 χ 与 S 的定义同于定义 2.3.7，$\hat{l}$ 与 $\hat{u}$ 分别表示 l 与 u 对 y 的 Fourier 变换. 算子 T_l' 之集记为 $\mathrm{Op}(l_{t,t'}^m)$.

将 z 视为参数，则 $l_{t,t'}^m$ 类中的函数类似于(2.3.11)可用球面调和 $\{h_\nu(\eta)\}$ 展开而有

$$l(z,y,\eta)=\sum_\nu a_\nu(z,y)h_\nu(\eta). \qquad (3.2.7)$$

将(3.2.7)代回(3.2.6)就有

$$(T_l'u(z,\cdot))\hat{}(\eta)=\sum_\nu T_{a_\nu}'\circ(S(\mathrm{D}_y)h_\nu(\mathrm{D}_y)u(z,\cdot))\hat{}(\eta),$$

即

$$T_l'u(z,y)=\sum_\nu T_{a_\nu}'S(\mathrm{D}_y)h_\nu(\mathrm{D}_y)u(z,y). \qquad (3.2.8)$$

由定理 3.2.2 及(3.2.8)知

定理 3.2.8 若 $l\in l_{t,t'}^m$，且 $t>1/2$，$t+t'>n/2$，$-t<s\leqslant t$，则算子 T_l' 是从 $H_{s'}^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H_{s'+\rho-m}^s(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子，$\rho=\rho(t,t')$.

同样，由定理 3.2.6 与(3.2.8)式，类似于定理 2.3.10 的证明我们可以证明

定理 3.2.9 若 $l_j\in l_{t,t'}^{m_j}(j=1,2)$，且 $t>1/2$，$t+t'>n/2$，$-t<s\leqslant t$，令

$$l(z,y,\eta)=\sum_{|\alpha|\leqslant\rho}\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha l_1\cdot\mathrm{D}_y^\alpha l_2,$$

则 $T_{l_1}'\circ T_{l_2}'=T_l'+R$，其中 R 是从 $H_{s'}^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H_{s'+\rho-(m_1+m_2)}^s(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子，$\rho=\rho(t,t')$.

类似于 2.3 节，这里也可以定义更一般的切向仿微分算子. 还是先从象征类定义开始.

定义 3.2.10 设 Ω 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的开集. 若对 $(z,y,\eta)\in[0,T]\times\Omega\times(\mathbf{R}^{n-1}\backslash\{0\})$，

$$a(z,y,\eta)=\sum_{0\leqslant j\leqslant[\rho]}a_{m-j}(z,y,\eta),$$

其中 a_{m-j} 对 (z,y) 属于 $H_{t'-j,\mathrm{loc}}^t([0,T]\times\Omega)$. 对 η 是 C^∞ 函数且是 η 的 $m-j$ 次齐次函数，则称 $a(z,y,\eta)$ 属于象征类 $\Sigma_{t,t'}^m$.

定义 3.2.11 设 A 是从 $\mathscr{D}'([0,T]\times\Omega)$ 到 $\mathscr{D}'([0,T]\times\Omega)$ 的具

有恰当支的算子. 若对所有 $[0,T]\times\Omega$ 中的紧集 K，均有在 K 附近恒为 1 的函数 $\chi\in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ 存在，使当 $\rho=\rho(t,t')>0$，$-t<s\leqslant t$ 时，

$$A-\chi T_{\chi a}':H_{s',\mathrm{comp}}^s\to H_{s'-m+\rho,\mathrm{comp}}^s.$$

为有界算子，则这类算子集合称为 Ω 上的 m 阶 (t,t') 类的切向仿微分算子，记为 $\mathrm{Op}(\Sigma_{t,t'}^m)$.

关于切向仿微分算子类 $\mathrm{Op}(\Sigma_{t,t'}^m)$，我们可以希望得到一些与仿微分算子类 $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$（见定义 2.3.15)平行的结论. 但由于切向仿微分算子讨论的复杂性(这从切向仿积以及后面一节将要讲到的切向仿线性化的讨论中可以看到)，就作者所知至今尚未有关于切向仿微分算子类 $\mathrm{Op}(\Sigma_{t,t'}^m)$ 的完整讨论. 许多作者都是按自己工作的需要就一些特殊情况得到一些具体的结果. 事实上在大多数非线性方程边值问题或混合问题的讨论中常常仅需要切向仿积以及切向仿线性化，而切向仿微分算子在实际问题中往往是切向仿积与微分算子的复合，这大概也是至今尚未有关于切向仿微分算子类 $\mathrm{Op}(\Sigma_{t,t'}^m)$ 的完整讨论的原因之一. 这方面的工作就留给有兴趣的读者去补齐了.

3.3 切向仿线性化

在 2.5 节中我们已经看到讨论非线性偏微分方程时可借助于仿线性化公式(或称第二线性化公式)将非线性问题转化为线性的仿微分方程，从而可以利用线性偏微分方程的概念和技巧来讨论非线性偏微分方程. 但另一方面我们又知道和拟微分算子一样，仿微分算子是定义在开集上的. 对非线性偏微分方程的边值问题是不能利用仿线性化公式的. 所以与 2.5 节平行，我们在这里要讨论切向仿线性化定理. 首先从简单的情形开始.

定理 3.3.1 设函数 $F(u)$ 对变元 u 为 C^∞ 函数，且 $F(0)=0$，又设 $u\in H_{s'}^s(\mathbf{R}^n)$，$s>1/2$，$s+s'>n/2$，那么

$$F(u)-T_{F'(u)}'u\in H_{s'+\rho}^s(\mathbf{R}^n),$$

其中 $\rho=\rho(s,s')$（$\rho(s,s')$ 的定义见定理 3.1.10).

证 由定理 3.2.2 知只需证

$$F(u)-\Pi_{F'(u)}u\in H^{s}_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n).$$

给出 u 的一个分解 $u=\sum_p\Delta_p u$，并记前 $p+1$ 项的和为 $\Sigma_p u=\sum_{l\leqslant p}\Delta_l u$. 注意这时 $\Sigma_{-1}u=\Delta_{-1}u$，并约定 $\Sigma_{-2}=0$，那么同(2.5.2)我们有

$$F(u)=\sum_{p=-1}^{\infty}(F(\Sigma_p u)-F(\Sigma_{p-1}u)).$$

再对 $\Sigma_p u$ 作分解 $\Sigma_p u=\sum_{p'}\Delta'_{p'}(\Sigma_p u)$，并记

$$\Sigma_{p,p'}u=\sum_{h\leqslant p'}\Delta'_h(\Sigma_p u).$$

同样约定 $\Sigma_{p,-2}u=0$，那么又可以写

$$\begin{aligned}F(u)&=\sum_{p,p'\geqslant-1}[F(\Sigma_{p,p'}u)-F(\Sigma_{p,p'-1}u)-F(\Sigma_{p-1,p'}u)\\&\quad+F(\Sigma_{p-1,p'-1}u)]\\&=\sum_{p,p'\geqslant-1}[(F(\Sigma_{p,p'}u)-F(\Sigma_{p,p'-1}u+\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u))\\&\quad+(F(\Sigma_{p,p'-1}u+\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)-F(\Sigma_{p,p'-1}u))\\&\quad-(F(\Sigma_{p-1,p'}u)-F(\Sigma_{p-1,p'-1}u))].\end{aligned}$$

对上式用中值定理有

$$\begin{aligned}F(u)&=\sum_{p,p'\geqslant-1}\Big\{\Delta_{p,p'}u\int_0^1F'(\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u)\mathrm{d}t\\&\quad+\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u\int_0^1F'(\Sigma_{p,p'-1}u+t\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)\mathrm{d}t\\&\quad-\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u\int_0^1F'(\Sigma_{p-1,p'-1}u+t\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)\mathrm{d}t\Big\}\\&=\sum_{p,p'\geqslant-1}\Delta_{p,p'}u\int_0^1F'(\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u)\mathrm{d}t\\&\quad-\sum_{p,p'\geqslant-1}(\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)(\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u)\int_0^1\int_0^1F''(\Sigma_{p-1,p'-1}u\\&\quad+\theta\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u+t\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

若记

$$m_{p,p'}(x)=\int_0^1F'(\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u)\mathrm{d}t,$$

$$l_{p,p'}(x)=\int_0^1\int_0^1F''(\Sigma_{p-1,p'-1}u+\theta\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u+t\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t,$$

那么

$$\begin{aligned}F(u)&=\sum_{p,p'\geqslant-1}m_{p,p'}(x)\Delta_{p,p'}u\\&\quad-\sum_{p,p'\geqslant-1}l_{p,p'}(x)(\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)(\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u).\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{F'(u)}u&=\sum_{p,p'\geqslant N_0-1}(S_{p,p'}F'(u))\Delta_{p,p'}u\\&=\sum_{p,p'\geqslant N_0-1}(\Sigma_{p-N_0,p'-N_0}F'(u))\Delta_{p,p'}u.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

由(3.3.1),(3.3.2)就得到

$$F(u)-\Pi_{F'(u)}u=\sigma_1(x,\mathrm{D})u-\sigma_2(x,\mathrm{D})u-B_l(u,u),\tag{3.3.3}$$

其中

$$\sigma_1(x,\mathrm{D})u=\sum_{p,p'\geqslant N_0-1}(S_{p,p'}F'(u)-m_{p,p'}(x))\Delta_{p,p'}u,$$

$$\sigma_2(x,\mathrm{D})u=\sum_{p\leqslant N_0\text{或}p'\leqslant N_0}m_{p,p'}(x)\Delta_{p,p'}u,$$

$$B_l(u,u)=\sum_{p,p'\geqslant-1}l_{p,p'}(x)(\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)(\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u).$$

$\sigma_1(x,\mathrm{D}),\sigma_2(x,\mathrm{D})$是零阶仿微分算子，$B_l$ 是一个仿微分型的双线性算子. 以下我们只需证明 $\sigma_1(x,\mathrm{D})u,\sigma_2(x,\mathrm{D})u,B_l(u,u)\in H^{s}_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$. 在证明这些命题之前我们需先考虑以下两个引理.

引理 3.3.2（推广的 Bernstein 不等式） 若 $a\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$（或 $L^\tau(\mathbf{R}_{x'},L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}))$），且 $\operatorname{supp}\hat{a}\subset\{(\xi',\xi_n);\ |\xi|\leqslant R,\ |\xi'|\leqslant R_1\}$，则 $a\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且对任意 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 必存在常数 $C=C(n,\alpha)>0$，使

$$\|\mathrm{D}^\alpha a\|_{L^\infty}\leqslant CR^{\alpha_n}\tilde{R}^{|\alpha'|}\|a\|_{L^\infty},\quad \tilde{R}=\min\{R,R_1\},\tag{3.3.4}$$

或 $$\|\mathrm{D}^\alpha a\|_{L^\tau(L^\infty)}\leqslant CR^{\alpha_n}\tilde{R}^{|\alpha'|}\|a\|_{L^\tau(L^\infty)},\tag{3.3.5}$$

其中指标 τ 是大于或等于 1 的实数.

证 先考虑 $a\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的情形. 取 $\chi_1(\xi_n),\chi_2(\xi')$ 均为 C_0^∞ 函数, 使 $\operatorname{supp}\chi_1\subset\{|\xi_n|\leqslant 2\}$, $\operatorname{supp}\chi_2\subset\{|\xi'|\leqslant 2\}$, 并且当 $|\xi_n|\leqslant 1$ 时 $\chi_1(\xi_n)=1$, $|\xi'|\leqslant 1$ 时 $\chi'(\xi')=1$. 记 $\chi_1(\xi_n),\chi_2(\xi')$ 以及 $\chi_1^R(\xi_n)=\chi_1(\xi_n/R)$, $\chi_2^{\tilde R}(\xi')=\chi_2(\xi'/\tilde R)$ 之逆 Fourier 变换分别为 $\theta_1(x_n),\theta_2(x'),\theta_1^R(x_n),\theta_2^{\tilde R}(x')$. 容易看到

$$\theta_1^R(x_n)=R\theta_1(Rx_n),\quad \theta_2^{\tilde R}(x')=\tilde R^{n-1}\theta_2(\tilde R x').$$

因为 $\hat a(\xi)=\chi_1^R(\xi_n)\chi_2^{\tilde R}(\xi')\hat a(\xi)$, 所以

$$a(x)=((\theta_1^R\theta_2^{\tilde R})*a)(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

而且

$$D^\alpha a(x)=((D_{x_n}^{\alpha_n}\theta_1^R D_{x'}^{\alpha'}\theta_2^{\tilde R})*a)(x).$$

但 $D_{x_n}^{\alpha_n}\theta_1^R=R^{1+\alpha_n}(D^{\alpha_n}\theta_1)(Rx_n)$, $D_{x'}^{\alpha'}\theta_2^{\tilde R}=\tilde R^{n-1+|\alpha'|}(D^{\alpha'}\theta_2)(\tilde R x')$. 因此

$$\|D_{x_n}^{\alpha_n}\theta_1^R D_{x'}^{\alpha'}\theta_2^{\tilde R}\|_{L^1}=R^{\alpha_n}\tilde R^{|\alpha'|}\|D^{\alpha_n}\theta_1 D^{\alpha'}\theta_2\|_{L^1}.$$

所以由 Hausdorff-Young 不等式我们有

$$\begin{aligned}\|D^\alpha a(x)\|_{L^\infty}&\leqslant\|D_{x_n}^{\alpha_n}\theta_1^R D_{x'}^{\alpha'}\theta_2^{\tilde R}\|_{L^1}\|a\|_{L^\infty}\\&\leqslant C(n,\alpha)R^{\alpha_n}\tilde R^{|\alpha'|}\|a\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

对 $a\in L^\tau(\mathbf{R}_{x'},L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}))$ 的情形类似上述方法可证得

$$\begin{aligned}\|D^\alpha a(x)\|_{L^\tau(L^\infty)}&\leqslant\|D_{x_n}^{\alpha_n}\theta_1^R D_{x'}^{\alpha'}\theta_2^{\tilde R}\|_{L^1}\|a\|_{L^\tau(L^\infty)}\\&\leqslant C(n,\alpha)R^{\alpha_n}\tilde R^{|\alpha'|}\|a\|_{L^\tau(L^\infty)}.\end{aligned}$$

引理证毕.

引理 3.3.3 *设 $G\in C^\infty(\mathbf{R})$, $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 为实值函数, $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 为任意重指标.*

1) 若当 $\beta\leqslant\alpha$ 时, 存在常数 $C(n,\beta)>0$, 使

$$\|D^\beta u\|_{L^\infty}\leqslant C(n,\beta)R^{\beta_n}\tilde R^{|\beta'|},$$

那么存在 $C'(n,\alpha)>0$, 使

$$\|D^\alpha G(u)\|_{L^\infty}\leqslant C'(n,\alpha)R^{\alpha_n}\tilde R^{|\alpha'|}.\tag{3.3.6}$$

2) 若当 $\beta\leqslant\alpha$ 时, 存在常数 $C(n,\beta)>0$, 使对任意的 $\tau\geqslant 2$ 有

$$\|D^\beta u\|_{L^\tau(L^\infty)}\leqslant C(n,\beta)R^{\beta_n}\tilde R^{|\beta'|},$$

并且 $\operatorname{supp}\hat u\subset\{|\xi'|\leqslant\tilde R\}$, 那么存在 $C'(n,\alpha)>0$, 使

$$\|D^\alpha G(u)\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant C'(n,\alpha)R^{\alpha_n}\tilde R^{|\alpha'|}.\tag{3.3.7}$$

证 1) 由链法则有

$$D^\alpha G(u)=\sum_{\alpha_{(1)}+\cdots+\alpha_{(q)}=\alpha}G^{(q)}(u)D^{\alpha(1)}u\cdots D^{\alpha(q)}u.$$

对模 $\|\cdot\|_{L^\infty}$, 由 $|u|$ 有界及 $G\in C^\infty(\mathbf{R})$ 知 $\|G^{(q)}(u)\|_{L^\infty}\leqslant C_q$. 再分别对 $D^{\alpha(1)},\cdots,D^{\alpha(q)}$ 用引理条件即知(3.3.6)成立.

2) 对模 $\|\cdot\|_{L^2(L^\infty)}$, 同 1)的讨论并对 x' 用 Hölder 不等式, 有

$$\|D^\alpha G(u)\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant C_\alpha\sum_{\alpha_{(1)}+\cdots+\alpha_{(q)}=\alpha}\|D^{\alpha(1)}u\|_{L^{\tau_1}(L^\infty)}\cdots\|D^{\alpha(k)}u\|_{L^{\tau_k}(L^\infty)},$$

其中 $\alpha_j\neq 0$, $\tau_j=2|\alpha|/|\alpha_j|\geqslant 2$ $(j=1,2,\cdots,k)$. 利用引理条件即知(3.3.7)成立.

定理 3.3.1 之证明 1) 首先, 当 $p'\leqslant N_0$ 时, $\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u$ 的谱的支集在 $\{|\xi|\leqslant c2^p\}\cap\{|\xi'|\leqslant c2^{N_0}\}$ 中, 由引理 3.3.2 与引理 3.3.3 知

$$|\partial_x^\alpha m_{p,p'}|\leqslant C_\alpha' 2^{p\alpha_n}.$$

当 $p\leqslant N_0$ 时, $\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u$ 的谱的支集在 $\{|\xi|\leqslant c2^{N_0}\}$ 中. 同样由引理 3.3.2 与引理 3.3.3 知

$$|\partial_x^\alpha m_{p,p'}|\leqslant C_\alpha.$$

所以 $\sigma_1(x,D)$ 是 $S_{1,1}^{0,-\infty}$ 类算子. 由定理 3.1.12 知 $\sigma_1(x,D)u\in H^{s,\infty}(\mathbf{R}^n)$.

2) 再看 $\sigma_2(x,D)u$, 先考虑 $s'>0$ 的情形. 对 $v\in C^\rho(\mathbf{R}^n)$ $(\rho>0)$ 用引理 3.3.2 有

$$\|\partial_x^\alpha S_{p,p'}v\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|}\|S_{p,p'}v\|_{L^\infty}.$$

而由引理 3.1.8 有

$$\begin{aligned}\|S_{p,p'}v\|_{L^\infty}&\leqslant\sum_{q\leqslant p,q'\leqslant p'}\|\Delta_{q,q'}v\|_{L^\infty}\\&\leqslant C\sum_{q\leqslant p,q'\leqslant p'}2^{\frac{1}{2}q+\frac{n-1}{2}q'}\|\Delta_{q,q'}v\|_0\\&\leqslant C\sum_{q\leqslant p,q'\leqslant p'}2^{-(s-\frac{1}{2})q-(s'-\frac{n-1}{2})q'}\varepsilon_{q,q'}.\end{aligned}$$

所以

$$\|\partial_x^\alpha S_{p,p'}v\|_{L^\infty}\leqslant\begin{cases}C_\alpha, & \text{当}|\alpha|<\rho,\\ C_\alpha(p+N_0), & \text{当}|\alpha|=\alpha_n=\rho,\\ C_\alpha(p'+N_0), & \text{当}|\alpha|=\rho,\ \alpha_n<\rho,\\ C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'\rho}, & \text{当}|\alpha|>\rho.\end{cases}\tag{3.3.8}$$

由 $u\in C^\rho$ 知 $F'(u)\in C^\rho$，因此当 $|\alpha|>\rho$ 时由上面讨论知

$$\|\partial_x^\alpha S_{p,p'}F'(u)\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'\rho}.$$

对 $m_{p,p'}$ 我们希望得到类似的估计，但这需要借助于引理 3.3.3，即需要对满足 $|\beta|\leqslant|\alpha|$，$|\alpha|>\rho$ 的重指标 β 给出相应的估计．但这时一般没有 $|\beta|>-\rho$ 的条件，解决的办法是将 u 看做 $C^{\rho|\beta|/|\alpha|}$ 的函数，当 $|\alpha|>\rho$ 时总有 $|\beta|>\rho|\beta|/|\alpha|$，故

$$\|\partial_x^\beta(\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u)\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p\beta_n+p'|\beta'|-p'\frac{|\beta|}{|\alpha|}\rho}.$$

于是由引理 3.3.3 有

$$\|\partial_x^\alpha m_{p,p'}\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'\rho}.$$

故对 $|\alpha|>\rho$ 有

$$\|\partial_x^\alpha(m_{p,p'}(x)-S_{p,p'}F'(u))\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'\rho}.\tag{3.3.9}$$

另一方面，对 $\alpha=0$ 有

$$\begin{aligned}&\|m_{p,p'}(x)-S_{p,p'}F'(u)\|_{L^\infty}\\ &\leqslant\|m_{p,p'}(x)-F'(u)\|_{L^\infty}+\|F'(u)-S_{p,p'}F'(u)\|_{L^\infty}\\ &\leqslant C_0 2^{-p'\rho}.\end{aligned}$$

用插值定理即知对任意的 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 有(3.3.9)成立．所以 $\sigma_2(x,\mathrm{D})\in S_{1,1}^{0,-\rho}$，注意 $s'>0$ 时 $s'+\rho>0$．再用定理 3.1.12 即知当 $s'+\rho>0$ 时 $\sigma_2(x,\mathrm{D})u\in H_{s'+\rho}^{s}(\mathbf{R}^n)$．

3） 当 $s'\leqslant 0$ 时一般不一定有 $s'+\rho>0$（$s'>0$ 时显然有 $s'+\rho>0$），不能用定理 3.1.12，而需作新的分解．首先我们知道当 $s'<0$ 时 $u\in H^{s+s'}(\mathbf{R}^n)$，又因为 $s+s'>n/2$，$F'(0)=0$，所以 $F'(u)\in H^{s+s'}(\mathbf{R}^n)$．记 $M_{p,p'}=m_{p,p'}(x)-S_{p,p'}F'(u)$，下面我们先给出 $\mathrm{D}_x^\alpha M_{p,p'}$ 的 $L_{x'}^2(L_{x_n}^\infty)$-模的估计，然后再对 $M_{p,p'}$ 作一新的分解并加以讨论．同 2)的讨论，首先对 $|\alpha|=0$ 有

$$\begin{aligned}\|M_{p,p'}\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant&\|m_{p,p'}-F'(u)\|_{L^2(L^\infty)}\\ &+\|F'(u)-S_{p,p'}F'(u)\|_{L^2(L^\infty)},\end{aligned}$$

用引理 3.1.8，并注意 $p'>p+N$ 时 $M_{p,p'}=0$，故有

$$\begin{aligned}\|M_{p,p'}\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant&C2^{p/2}(\|m_{p,p'}-F'(u)\|_0\\ &+\|F'(u)-S_{p,p'}F'(u)\|_0)\\ \leqslant&C2^{-p(s-\frac12)-p's'}\leqslant C2^{-p'(s+s'-\frac12)}.\end{aligned}$$

对 $|\alpha|>s+s'-1/2$，用引理 3.3.2 与引理 3.1.8 有

$$\|\mathrm{D}^\alpha S_{p,p'}F'(u)\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'(s+s'-\frac12)}.$$

另一方面，若记 $v_{p,p'}=\Sigma_{p,p'}u+(t-1)\Delta_{p,p'}u$，那么对任意满足 $|\beta|\leqslant|\alpha|$ 的 β 我们有 $u\in H^{s+s'}\subset H^\tau$，其中

$$\tau=\left(s+s'-\frac12\right)\frac{|\beta|}{|\alpha|}+\frac12\leqslant s+s'.$$

当 $|\alpha|>s+s'-1/2$ 时总有

$$|\beta|>\left(s+s'-\frac12\right)\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\tau-\frac12.$$

所以可用引理 3.3.2 与引理 3.1.8 得到

$$\|\mathrm{D}^\beta v_{p,p'}\|_{L^\tau(L^\infty)}\leqslant C_\beta 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'(s+s'-\frac12)\frac{|\beta|}{|\alpha|}}.$$

再用引理 3.3.3 就有

$$\|\mathrm{D}^\alpha F'(v_{p,p'})\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'(s+s'-\frac12)}.$$

由插值定理即知对任意的 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 均有

$$\|\mathrm{D}^\alpha M_{p,p'}\|_{L^2(L^\infty)}\leqslant C_\alpha 2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'(s+s'-\frac12)}.\tag{3.3.10}$$

下面对 $M_{p,p'}$ 作新的分解，仍用 3.1 节的记号有

$$\begin{aligned}1=&\left(\psi(2^{-p}\xi)+\sum_{q\geqslant0}\varphi(2^{-(p+q)}\xi)\right)\\ &\cdot\left(\psi'(2^{-p'}\xi')+\sum_{q'\geqslant0}\varphi'(2^{-(p'+q')}\xi')\right),\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}M_{p,p'}=&\sum_{q'\geqslant0}(\Sigma_p\Delta'_{p'+q'}M_{p,p'})+\sum_{q\geqslant0}(\Delta_{p+q}\Sigma'_{p'}M_{p,p'})\\ &+\sum_{q,q'\geqslant0}(\Delta_{p+q,p'+q'}M_{p,p'}).\end{aligned}$$

为方便也记为

$$M_{p,p'} = \sum_{q'\geqslant 0}[M_{p,p'}]'_{q'} + \sum_{q\geqslant 0}[M_{p,p'}]_q + \sum_{q,q'\geqslant 0}[M_{p,p'}]_{q,q'}. \tag{3.3.11}$$

由(3.3.10)我们可以证明对任意正整数 M, M'，存在常数 $C_M, C_{M'}$ 以及 $C_{M,M'}$ 使

$$\| [M_{p,p'}]_q \|_{L^2(L^\infty)} \leqslant C_M 2^{-Mq-p'(s+s'-\frac{1}{2})}, \tag{3.3.12}$$

$$\| [M_{p,p'}]'_{q'} \|_{L^2(L^\infty)} \leqslant C_{M'} 2^{-M'q'-p'(s+s'-\frac{1}{2})}, \tag{3.3.13}$$

$$\| [M_{p,p'}]_{q,q'} \|_{L^2(L^\infty)} \leqslant C_{M,M'} 2^{-Mq-M'q'-p'(s+s'-\frac{1}{2})} \tag{3.3.14}$$

成立. 以下我们仅证(3.3.12)，其他两式的证明是类似的. 设 h 是 φ 的逆 Fourier 变换，则 φ_{p+q} 的逆 Fourier 变换是

$$h_{p+q} = 2^{n(p+q)} h(2^{p+q}x).$$

由于当 $|\xi| \leqslant \kappa^{-1}$ 时 $\varphi(\xi)=0$，所以对一切 $\lambda \in \mathbf{N}^n$ 有

$$(-1)^{|\lambda|}\int x^\lambda h(x)\mathrm{d}x = \mathrm{D}_\xi^\lambda \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} h(x)\mathrm{d}x \Big|_{\xi=0} = \mathrm{D}_\xi^\lambda \varphi(0) = 0.$$

而

$$\begin{aligned}\Delta_{p+q}(\Sigma_{p'} M_{p,p'}) &= \int h_{p+q}(x-y)(\Sigma_{p'} M_{p,p'})(y)\mathrm{d}y \\ &= \int 2^{n(p+q)} h(2^{p+q}x)\{(\Sigma_{p'} M_{p,p'})(y) \\ &\quad - \sum_{|\lambda|\leqslant l} \frac{1}{\lambda!}(x-y)^\lambda \partial^\lambda (\Sigma_{p'} M_{p,p'})(x)\}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以

$$\| [M_{p,p'}]_q \|_{L^2(L^\infty)} \leqslant C_\alpha 2^{-(p+q)|\alpha|} \| \partial^\alpha (\Sigma_{p'} M_{p,p'})(y) \|_{L^2(L^\infty)}.$$

再由(3.3.10)知

$$\begin{aligned}\| [M_{p,p'}]_q \|_{L^2(L^\infty)} &\leqslant C_\alpha 2^{-(p+q)|\alpha|+p\alpha_n+p'|\alpha'|-p'(s+s'-\frac{1}{2})} \\ &\leqslant C_\alpha 2^{-q|\alpha|-p'(s+s'-\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

取 α 使 $|\alpha| = M$ 则(3.3.12)成立.

有了以上准备，下面再回头考虑 $\sigma_2(x,\mathrm{D})u$，由(3.3.11)有

$$\sigma_2(x,\mathrm{D})u = \sum_{p,p'} M_{p,p'}\Delta_{p,p'}u$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{q'\geqslant 0}\Big(\sum_{p,p'}[M_{p,p'}]'_{q'}\Delta_{p,p'}u\Big) + \sum_{q\geqslant 0}\Big(\sum_{p,p'}[M_{p,p'}]_q\Delta_{p,p'}u\Big) \\ &\quad + \sum_{q,q'\geqslant 0}\Big(\sum_{p,p'}[M_{p,p'}]_{q,q'}\Delta_{p,p'}u\Big) \\ &= \sum_{q'\geqslant 0} W'_{q'} + \sum_{q\geqslant 0} W_q + \sum_{q,q'\geqslant 0} W_{q,q'}.\end{aligned}$$

对上式我们分别估计如下：

(a) 先看 $W'_{q'}$，它的每一项的谱的支集包含在

$$\{|\xi| \leqslant \mu 2^p,\ \mu^{-1}2^{p'+q'} \leqslant |\xi'| \leqslant \mu 2^{p'+q'+1}\}$$

中，其中 μ 是较 κ 更大的常数. 那么由引理 3.1.9 与(3.3.12)有

$$\begin{aligned}\| [M_{p,p'}]'_{q'}\Delta_{p,p'}u \|_0 &\leqslant C 2^{(p'+q')\frac{n-1}{2}} \| [M_{p,p'}]'_{q'}\Delta_{p,p'}u \|_{L^1(L^2)} \\ &\leqslant \| [M_{p,p'}]'_{q'} \|_{L^2(L^\infty)} \| \Delta_{p,p'}u \|_0 \\ &\leqslant C_{M'} 2^{-q'(M'-\frac{n-1}{2})-p'(s+2s'-\frac{n}{2})-ps}\varepsilon_{p,p'} \\ &\leqslant C_{M'} 2^{-q'(M'-\frac{n-1}{2})-p'(s'+\rho)-ps}\varepsilon_{p,p'},\end{aligned}$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}\} \in l^2$. 由引理 3.1.6 知当 $M' > (n-1)/2$ 时 $W'_{q'} \in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{q'} W'_{q'} \Big\|_{s,s'+\rho} &\leqslant \sum_{q'} \| W'_{q'} \|_{s,s'+\rho} \\ &\leqslant \sum_{q'}\Big[\sum_{p,p'} 4^{ps+(p'+q')(s'+\rho)}(C_{M'}2^{-q'(M'-\frac{n-1}{2})-p'(s'+\rho)-ps}\varepsilon_{p,p'})^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sum_{q'} C_{M'} 2^{-q'(M'-\frac{n-1}{2}-s'-\rho)},\end{aligned}$$

选择 M' 充分大就证得 $\sum_{q'} W'_{q'} \in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

(b) 再看 W_q，它的每一项的谱的支集包含在

$$\{\mu^{-1}2^{p+q} \leqslant |\xi| \leqslant \mu 2^{p+q+1},\ |\xi'| \leqslant \mu 2^{p'}\}$$

中. 这里较 $W'_{q'}$ 更为困难的是因 $s'<0$ 而不能直接用引理 3.1.6，故需重新分解 W_q 为

$$W_q = \sum_{k,p}\Big(\Delta'_k \sum_{p'}[M_{p,p'}]_q \Delta_{p,p'}u\Big),$$

那么由引理 3.1.9 与(3.1.13)，并注意 $s+2s'-1/2>0$，则有

$$\left\|\Delta_k'\sum_{p'}[M_{p,p'}]_q\Delta_{p,p'}u\right\|_0\leqslant C2^{(n-1)k/2}\left\|\Delta_k'\sum_{p'}[M_{p,p'}]_q\Delta_{p,p'}u\right\|_{L^1(L^2)}$$
$$\leqslant C_M2^{(n-1)k/2}\sum_{p'\geqslant k-N_0}2^{-Mq-p'(s+2s'-\frac{1}{2})-ps}\varepsilon_{p,p'}$$
$$\leqslant C_M2^{-Mq-ps-k(s'+\rho)}\varepsilon_{p,k}.$$

同(a)的讨论知 $W_q\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，进而当 M 充分大时

$$\sum_q W_q\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n).$$

(c) 最后看 $W_{q,q'}$，它的每一项的谱的支集包含在

$$\{\mu^{-1}2^{p+q}\leqslant|\xi|\leqslant\mu2^{p+q+1},\ \mu^{-1}2^{p'+q'}\leqslant|\xi'|\leqslant\mu2^{p'+q'+1}\}$$

中. 由引理 3.1.9 与(3.3.14)有

$$\|[M_{p,p'}]_{q,q'}\Delta_{p,p'}u\|_0\leqslant C2^{(p'+q')\frac{n-1}{2}}\|[M_{p,p'}]_{q,q'}\Delta_{p,p'}u\|_{L^1(L^2)}$$
$$\leqslant C_{M,M'}2^{-Mq-q'(M'-\frac{n-1}{2})-p'(s'+\rho)-ps}\varepsilon_{p,p'},$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2$. 由引理 3.1.6 可知 $W_{q,q'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，进而当 M, M' 充分大时

$$\sum_{q,q'}W_{q,q'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n).$$

4) 最后讨论

$$B_l(u,u)=\sum_{p,p'}l_{p,p'}(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u),$$

这里

$$l_{p,p'}(x)=\int_0^1\int_0^1F''(\Sigma_{p-1,p'-1}u+\theta\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u+t\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t.$$

由引理 3.3.2 与引理 3.3.3 知

$$\|\partial_x^\alpha l_{p,p'}\|_{L^\infty}\leqslant C_\alpha2^{p\alpha_n+p'|\alpha'|}.\tag{3.3.15}$$

同 3)将 $l_{p,p'}$ 作新的分解有

$$l_{p,p'}(x)=\sum_{q'}[l_{p,p'}]_{q'}'+\sum_q[l_{p,p'}]_q+\sum_{q,q'}[l_{p,p'}]_{q,q'}.$$

类似(3.3.12),(3.3.13),(3.3.14)的证明我们可以从(3.3.15)推得对任意的 M,M'，存在 $C_M,C_{M'},C_{M,M'}$ 使

$$\|[l_{p,p'}]_q\|_{L^\infty}\leqslant C_M2^{-Mq},\tag{3.3.16}$$
$$\|[l_{p,p'}]_{q'}'\|_{L^\infty}\leqslant C_{M'}2^{-M'q'},\tag{3.3.17}$$
$$\|[l_{p,p'}]_{q,q'}\|_{L^\infty}\leqslant C_{M,M'}2^{-Mq-M'q'}.\tag{3.3.18}$$

那么对 $B_l(u,u)$ 有

$$B_l(u,u)=\sum_{q'}\Big[\sum_{p,p'}[l_{p,p'}]_{q'}'(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\Big]$$
$$+\sum_q\Big[\sum_{p,p'}[l_{p,p'}]_q(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\Big]$$
$$+\sum_{q,q'}\Big[\sum_{p,p'}[l_{p,p'}]_{q,q'}(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\Big]$$
$$=\sum_{q'}v_{q'}'+\sum_qv_q+\sum_{q,q'}v_{q,q'}.$$

下面分别估计 $v_{q'}',v_q,v_{q,q'}$.

(a) 首先看 v_q，它的每一项的谱的支集包含在

$$\{\mu^{-1}2^{p+q}\leqslant|\xi|\leqslant\mu2^{p+q+1},\ |\xi'|\leqslant\mu2^{p'}\}$$

中. 并且由(3.3.16)有

$$\|[l_{p,p'}]_q(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\|_0$$
$$\leqslant C_M2^{-Mq}\|(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\|_0.$$

而类似于定理 3.2.2 的证明我们有

$$\|(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\|_0$$
$$\leqslant\|\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u\|_{L^2(L^\infty)}\|\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u\|_{L^\infty(L^2)}$$
$$\leqslant2^{-ps-p'(s'+\rho)}\varepsilon_{p,p'},$$

所以

$$\|[l_{p,p'}]_q(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\|_0\leqslant C_M2^{-Mq-ps-p'(s'+\rho)}\varepsilon_{p,p'},$$

其中 $\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2$. 在 $s'>0$ 的条件下由以上讨论及定理 3.1.6 知 $v_q\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，再由 M 充分大即证得 $\sum_qv_q\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

若 $s'\leqslant0$，则考虑

$$\left\|\Delta_k'\sum_{p'}[l_{p,p'}]_q(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\right\|_0$$
$$\leqslant C2^{\frac{n-1}{2}k}\left\|\Delta_k'\sum_{p'}[l_{p,p'}]_q(\Sigma_{p-1}\Delta_{p'}'u)(\Delta_p\Sigma_{p'-1}'u)\right\|_{L^1(L^2)}$$
$$\leqslant C_M2^{-Mq-ps-k(s'+\rho)}\varepsilon_{p,k},$$

其中 $\{\varepsilon_{p,k}\}\in l^2$. 同 3)之(b)也有 $\sum_qv_q\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

(b) 再看 $v'_{q'}$, 它的每一项的谱的支集包含在

$$\{|\xi|\leqslant \mu 2^{p},\ \mu^{-1}2^{p'+q'}\leqslant|\xi'|\leqslant \mu 2^{p'+q'+1}\}$$

中，由(3.3.17)知

$$\begin{aligned}&\|[l_{p,p'}]'_{q'}(\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)(\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u)\|_0\\&\leqslant C_{M'}2^{-M'q'-ps-p'(s'+\rho)}\varepsilon_{p,p'},\end{aligned}$$

其中$\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2$. 因这时候总有 $s>0$，故可用定理 3.1.6 知 $v'_{q'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，再由 M'充分大即证得 $\sum_{q'}v'_{q'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

(c) 最后看 $v_{q,q'}$，它的每一项的谱的支集包含在

$$\{\mu^{-1}2^{p+q}\leqslant|\xi|\leqslant \mu 2^{p+q+1},\ \mu^{-1}2^{p'+q'}\leqslant|\xi'|\leqslant \mu 2^{p'+q'+1}\}$$

中，用(3.3.18)易证

$$\begin{aligned}&\|[l_{p,p'}]_{q,q'}(\Sigma_{p-1}\Delta'_{p'}u)(\Delta_p\Sigma'_{p'-1}u)\|_0\\&\leqslant C_{M,M'}2^{-Mq-M'q'-ps-p'(s'+\rho)}\varepsilon_{p,p'},\end{aligned}$$

其中$\{\varepsilon_{p,p'}\}\in l^2$. 同样用定理 3.1.6 知 $v_{p,p'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，再取 M,M'充分大证得 $\sum_{p,p'}v_{p,p'}\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$.

综合 1),2),3),4)，我们知 $\sigma_1(x,D)u+\sigma_2(x,D)u+B_l(u,u)\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，即 $F(u)-\Pi_{F'(u)}u\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$. 再由定理 3.2.2 即知 $F(u)-T'_{F'(u)}u\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$. 定理证毕.

与仿线性化定理(见定理 2.5.1)同样的处理，我们可把定理 3.3.1 推广到下面的一般形式：

定理 3.3.4 *设 $F(x,y)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^N)$，且对 x 具紧支集. 若实值函数 $u_1,\cdots,u_N\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n)$，$s>1/2$，$s+s'>n/2$ 且 $s+2s'>1/2$，那么*

$$F(x,u_1,\cdots,u_N)-\sum_{j=1}^N T'_{(\partial_{u_j}F)(x,u_1,\cdots,u_N)}u_j\in H^s_{s'+\rho}(\mathbf{R}^n).$$

3.4 非线性方程解的奇异性的反射

作为切向仿微分算子以及切向仿线性化的一个应用，我们考虑非线性偏微分方程解的奇性反射. 首先，我们引进切向微局部化以

及切向微局部 Sobolev 空间的概念. 如同 J. Sjöstrand 在[Sj2]中所作的一样，我们定义切向拟微分算子为

$$Tu(x)=(2\pi)^{-(n-1)}\iint a(x,y',\xi')e^{i(x'-y')\xi'}u(y',x_n)dy'd\xi',\tag{3.4.1}$$

其中 $a(x,y',\xi')$是定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^{n-1}$上的经典象征. 若 T 是具恰当支集的算子，又可写

$$Tu(x)=(2\pi)^{-(n-1)}\int e^{ix'\xi'}t(x,\xi')\tilde{u}(\xi',x_n)d\xi'.\tag{3.4.2}$$

在上式的表示中，$\tilde{u}(\xi',x_n)$记 $u(x',x_n)$对变量 x'的 Fourier 变换. 与通常的经典拟微分算子理论一样，当 $t(x,\xi')\in S^m_{1,0}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n-1})$时，我们记相应的算子 T 的集合为 $T^m(\mathbf{R}^n)$. 显然若 $T\in T^m(\mathbf{R}^n)$，则 T 是从 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$到 $H^s_{s'-m}(\mathbf{R}^n)$的有界算子. 更一般地，对 $\mathbf{R}^n$ 中的任意开集 Ω，T 是从 $H^s_{s',\mathrm{loc}}(\Omega)$到 $H^s_{s'-m,\mathrm{loc}}(\Omega)$的有界算子. $T^{-\infty}=\bigcap_{m=1}^{\infty}T^m$ 是具有 C^∞核的算子的集合，确切地说一个算子 $R\in T^{-\infty}$是指

$$Ru(x)=\int R(x,y')u(y',x_n)dy',\quad R(x,y')\in C^\infty.\tag{3.4.3}$$

和第 1 章的拟微分算子的讨论类似，切向拟微分算子的讨论总是在相差一个 $T^{-\infty}$类的算子的意义下进行的. 用切向拟微分算子可以很方便地给出切向微局部化的概念.

定义 3.4.1 *若 $u\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，且当$(x_0,\xi'_0)\in\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\})$时，存在 $T\in T^0(\mathbf{R}^n)$且在点(x_0,ξ'_0)是椭圆的，使得 $Tu\in H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，则称 u 在(x_0,ξ'_0)是切向微局部地属于 $H^s_{s'}(\mathbf{R}^n)$，记作 $u\in\widetilde{H}^s_{s'}(x_0,\xi'_0)$.*

我们考虑如下拟线性偏微分方程

$$Lu=\partial_{x_n}u+G(x,u(x),\cdots,\partial^\alpha u(x),\cdots)=0,\tag{3.4.4}$$

其中 $G\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^N)$且具紧支集，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$，$|\alpha|\leqslant1$. 在本节我们总设 $u\in H^{s+1}_{s',\mathrm{loc}}(\Omega)$，$s>1/2+2$，$s+s'>n/2+2$. 又记

$$p_1(x,\xi)=\xi_n+\sum_{|\alpha|=1}\frac{\partial G}{\partial u_\alpha}(x,u(x),\cdots)(\xi')^\alpha\tag{3.4.5}$$

为(3.4.4)的主象征. 以下为方便计，常记

$$a(x,\xi') = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial G}{\partial u_\alpha}(x,u(x),\cdots)(\xi')^\alpha.$$

设 Γ 是算子 L 过 $(x,\xi',a(x,\xi'))$ 的次特征带. $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 在超平面 $\{\xi_n=0\}$ 上的投影. 若记 $x_n=t$，则曲线 $\tilde{\Gamma}=\{(t,x'(t),\xi'(t))\}$ 是微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial a}{\partial \xi_j}(t,x',\xi'), & \text{当 } x'(0)=x_0', \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial a}{\partial y_j}(t,x',\xi'), & \text{当 } \xi'(0)=\xi_0' \end{cases}$$

$$(j=1,2,\cdots,n-1) \qquad (3.4.6)$$

的解. 由定理 3.1.10 知 $u\in H^s_{s',\mathrm{loc}}(\Omega)$ 就保证了 $u\in C^2$，故过任一固定点 (t_0,x_0',ξ_0') 的 $\tilde{\Gamma}$ 是唯一的.

关于方程(3.4.4)的解 $u(x)$ 的奇性的反射，我们有如下结果：

定理 3.4.2 *若(3.4.4)有解* $u\in H^{s+1}_{s',\mathrm{loc}}(\Omega)$，$s>1/2+2$，$s+s'>n/2+2$，*实数* $\sigma\in[s',s'+\rho]$，$\rho=\rho(s,s')$ （$\rho(s,s')$ *的定义见定理* 3.1.10).

1) *若对某一固定的* $t_1\in\,]0,T]$，$u\in H^{s+1}_{s',\mathrm{loc}}\cap \tilde{H}^{s+1}_\sigma(t_1,x'(t_1),\xi'(t_1))$，$\tilde{\Gamma}$ *过* $(t_1,x'(t_1),\xi'(t_1))$ *点，则* $u\in \tilde{H}^{s+1}_\sigma(\tilde{\Gamma})$，*并且对任意* $t\in[0,T]$，$u(t,\cdot)\in H^{\sigma+s+1}(x'(t),\xi'(t))$；

2) *若* $u|_{t=0}\in H^{\sigma+s+1}(x'(0),\xi'(0))$，*那么* $u\in \tilde{H}^s_\sigma(\tilde{\Gamma})$，*且对任意* $t\in[0,T]$，$u(t,\cdot)\in H^{\sigma+s+1}(x'(t),\xi'(t))$.

这一结果可见[Ala]. 其中 1)和 2)可以分别用来描述奇性的入射与反射，它的一个重要特点是在低一维的情形下，u 微局部的正则性并不减少 1/2. 具体地说，当把点 $(t,x'(t),\xi'(t))$ 限制到 $\{t=\mathrm{const.}\}$ 上时，u 在点 $(x'(t),\xi'(t))$ 的正则性并不减少.

由于定理的证明较长，我们这里仅简单给出证明的思想，具体的细节请见[Ala].

首先，将(3.4.4)作切向仿线性化，有

$$\partial_{x_n}u + \sum_{|\alpha|\le 1} T'_{\partial G/\partial u_\alpha}\partial_{x_j}u = R. \qquad (3.4.7)$$

由定理 3.3.4 知 $R\in H^s_{s'+\rho,\mathrm{loc}}(\Omega)$，$\rho=\rho(s,s')$. 而对(3.4.4)的讨论

就转化为对切向仿微分方程(3.4.7)的讨论. 较一般地，我们可以考虑切向仿微分方程

$$Pu = \mathrm{D}_{x_n}u - A(x,\mathrm{D}_{x'})u = R, \qquad (3.4.8)$$

其中 $A\in \mathrm{Op}(\Sigma^1_\rho)$，$R\in H^s_{s'+\rho,\mathrm{loc}}(\Omega)$，并记 $p(x,\xi)=\tau-A(x,\xi')$ 为算子 P 的象征. 容易看到定理 3.4.2 是下面定理的简单推论.

定理 3.4.3 *若(3.4.8)有解* $u\in H^{s+1}_{s',\mathrm{loc}}(\Omega)$，$s>1/2+2$，$s+s'>n/2+2$，*实数* $\sigma\in[s',s'+\rho]$，$\rho=\rho(s,s')$.

1) *若对某一固定的* $t_1\in\,]0,T]$，$u\in H^{s+1}_{s',\mathrm{loc}}\cap \tilde{H}^{s+1}_\sigma(t_1,x'(t_1),\xi'(t_1))$，$R\in H^s_{s',\mathrm{loc}}\cap \tilde{H}^s_{\sigma+1}(\tilde{\Gamma})$，*则* $u\in \tilde{H}^{s+1}_\sigma(\tilde{\Gamma})$，*并且对任意* $t\in[0,T]$，$u(t,\cdot)\in H^{\sigma+s+1}(x'(t),\xi'(t))$；

2) *若* $u|_{t=0}\in H^{\sigma+s+1}(x'(0),\xi'(0))$，*那么* $u\in \tilde{H}^{s+1}_\sigma(\tilde{\Gamma})$，*且对任意* $t\in[0,T]$，$u(t,\cdot)\in H^{\sigma+s+1}(x'(t),\xi'(t))$.

和 2.6 节的非线性偏微分方程奇性传播定理的证明类似，定理 3.4.3 的证明主要依赖于沿 $\tilde{\Gamma}$ 所作的切向微局部的估计式. 为了得到这一估计式，除了要用到 2.6 节中提到的关于仿微分算子的强 Gårding 不等式外，还用到类似于引理 2.6.3 的一个引理，不过这里不同的是需要针对入射次特征带和反射次特征带的不同的特点分别讨论，并注意考虑边界点上的一些新特点. 这里我们就不一一叙述与证明了，有兴趣的读者请参阅文[Ala]和[Sa].

第 4 章　余法分布空间和余法奇性

在本书的第二、三章我们讨论了仿微分算子的理论及应用，它所用到的基本思想是调和分析中的 L-P 分解，而这正体现了微局部分析更趋于“精细”的发展趋势. 能体现这一发展趋势的另一重要的思想是处理所谓“各向异性”的(拟)微分算子，它将经典拟微分算子“平等地”处理各个方向的方法更精细地改进为针对各个方向的不同特点“非齐性”地处理各个不同方向的问题，这无疑使微局部分析理论发展到一个更高的层次. 而本章将讲述的余法分布空间正是这一思想最直接地应用. 至于讨论这个思想更进一步的发展和应用是本书后三章的任务. 本章在介绍余法分布空间最基本的概念和性质后，着重在余法分布空间的框架下讨论了非线性方程解的奇性的传播，相互作用与反射，并在最后一节介绍一些具有很强技术性的有关余法奇性的最新研究成果.

4.1　余法分布空间

我们先从最简单的情形开始. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一开集，$\Sigma\subset\Omega$ 为一 C^∞ 超曲面，$T\Omega$ 表示 Ω 上的切丛，$\mathscr{M}_\Sigma\subset C^\infty(\Omega,T\Omega)$ 是 Ω 上所有切于 Σ 的向量场集合，则我们定义

定义 4.1.1　*若对任意 $M_j\in\mathscr{M}_\Sigma$，函数 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ 满足*

$$M_{i_1}\cdots M_{i_l}u\in H^s_{loc}(\Omega),\quad l\leqslant k,$$

则称 u 是 $H^s_{loc}(\Omega)$ 中相对于 Σ 的 k 阶余法分布. 所有满足这一性质的函数 u 的全体称为 $H^s_{loc}(\Omega)$ 上相对于 Σ 的 k 阶余法分布空间，记为 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$.

显然，由定义知道，若 $s_1\leqslant s_2$，$k_1\leqslant k_2$，则

$$H^{s_2,k_2}(\Omega,\Sigma)\subset H^{s_1,k_1}(\Omega,\Sigma).$$

若对任意 k 均有 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$，则称 $u\in H^{s,\infty}(\Omega,\Sigma)$，即

$$H^{s,\infty}(\Omega,\Sigma)=\bigcap_k H^{s,k}(\Omega,\Sigma).$$

$H^{s,\infty}(\Omega,\Sigma)$之元的一个最典型例子是到 Σ 的齐次距离函数. 又若记 $x=(x',x_n)$，$\varphi(x')\in C^\infty$，$h(x_n)$是 Heaviside 函数，则 $\varphi(x')\otimes h(x_n)$ 是 $H^{s,\infty}(\Omega,\{x_n=0\})$的元素.

注　更一般地，将 $\mathbf{R}^n$ 换为一 C^∞ 流形 X，Σ 是 X 的一闭嵌入子流形，亦可类似于定义 4.1.1 来定义流形上的余法分布空间.

因为 Σ 是一 C^∞ 超曲面，所以 $\mathscr{M}_\Sigma$ 对交换运算是封闭的，即当 $Z_1,Z_2\in\mathscr{M}_\Sigma$ 时，

$$[Z_1,Z_2]\in\mathscr{M}_\Sigma. \tag{4.1.1}$$

事实上，若设 Σ 局部地可由 $\varphi(x)=0$ 给出，任取向量场 $Z\in\mathscr{M}_\Sigma$，则在超曲面 Σ 上 Z 的方向应与 Σ 的法方向垂直，即 $Z\varphi|_\Sigma=0$. 由 Weierstrass 预备定理即知存在一个 C^∞ 的函数 $a(x)$，使得 $Z\varphi(x)=a(x)\varphi(x)$. 反之，若某向量场 Z 满足 $Z\varphi(x)=a(x)\varphi(x)$，则 $Z\in\mathscr{M}_\Sigma$. 现在 $Z_1,Z_2\in\mathscr{M}_\Sigma$，那么 $Z_1\varphi=a_1\varphi$，$Z_2\varphi=a_2\varphi$，也就有

$$(Z_1Z_2-Z_2Z_1)\varphi=(Z_1a_2-Z_2a_1)\varphi,$$

故(4.1.1)成立.

若记 $\mathrm{Diff}^k(\Omega)$是 Ω 上 k 阶微分算子的全体，并定义 $\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)$是由 $\mathscr{M}_\Sigma$ 中至多 k 个向量场生成的 C^∞ 系数的代数，显然 $\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)\subset\mathrm{Diff}^k(\Omega)$. 由(4.1.1)，定义 4.1.1 可改写为

$$H^{s,k}(\Omega,\Sigma)=\{u\in H^s_{loc}(\Omega);\ Pu\in H^s_{loc}(\Omega),\ P\in\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)\}. \tag{4.1.2}$$

而 $\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)$被称之为“相对于 Σ 的 k 阶全特征微分算子”(详见[Hö2]第二卷，第 18 章).

进一步我们还可看到当 $x\in\Omega\backslash\Sigma$ 时，$\mathscr{M}_\Sigma$ 由 x 点的切向量场 $T_x\mathbf{R}^n$ 张成；当 $x\in\Sigma$ 时，$\mathscr{M}_\Sigma$ 则仅由 $T_x\Sigma$ 张成. 下面，我们回顾一下余切丛和余法丛的定义，并利用上述事实初步了解余法丛与余法分

布空间的关系. 首先对任一固定的定点x_0, $T^*_{x_0}\mathbf{R}^n$ 可以定义为

$$T^*_{x_0}\mathbf{R}^n = C^\infty(\mathbf{R}^n)/\underset{x_0}{\sim},$$

这里等价关系"$\underset{x_0}{\sim}$"是指: 若

$$f-g=f(x_0)-g(x_0)+h(x),\quad h(x)=o(1)(x-x_0),$$

则称 $f\underset{x_0}{\sim}g$, 这样的等价类记作$[f]_{x_0}$. 那么余切丛 $T^*\mathbf{R}^n$ 定义为

$$T^*\mathbf{R}^n=\bigcup_{x\in\mathbf{R}^n}T^*_x\mathbf{R}^n.$$

对 $\Sigma\subset\mathbf{R}^n$, 我们还记

$$T^*_\Sigma\mathbf{R}^n=\bigcup_{x\in\Sigma}T^*_x\mathbf{R}^n.$$

当然, 余切丛 $T^*\mathbf{R}^n$ 是切丛 $T\mathbf{R}^n$ 的对偶空间. 我们又定义

$$N^*_\Sigma=\{(x,\alpha)\in T^*_x\mathbf{R}^n;\ x\in\Sigma,\ \alpha=[f]_x,\ f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)\text{ 且在 }\Sigma\text{ 上 }f=0\}. \tag{4.1.3}$$

并称 $N^*_\Sigma(\subset T^*_\Sigma\mathbf{R}^n)$是相对于超曲面 Σ 的余法丛. 而 $T\Sigma\subset T_\Sigma\mathbf{R}^n$ 可与 N^*_Σ 在 $T_\Sigma\mathbf{R}^n$ 中的零化子等同. 这就是我们称 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$为余法分布空间的由来. 关于余法丛与余法分布空间的关系, 在后面的讨论中将会看得更清楚.

下面两个引理将有助于我们更具体地了解余法分布空间的一些性质.

引理 4.1.2 *若 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$, 则 u 在开集 $\Omega\backslash\Sigma$ 上属于 $H^{s+k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

证 任给 $x\in\Omega\backslash\Sigma$, 可作截断函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 使在 x 的一个邻域中 $\varphi(x)=1$ 且 $\mathrm{supp}\,\varphi\cap\Sigma=\varnothing$, 那么任给 $P\in\mathrm{Diff}^k(\Omega)$ (注意不是 $\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)$), 显然有 $P(\varphi u)\in H^s(\Omega)$, 所以 $\varphi u\in H^{s+k}(\Omega)$, 即 u 在$\Omega\backslash\Sigma$ 上属于 $H^{s+k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

由这一引理马上可以推出:

$$u\in H^{s,\infty}(\Omega,\Sigma)\Rightarrow \mathrm{sing\,supp}\,u(x)\subset\Sigma. \tag{4.1.4}$$

更进一步, 我们用记号 $\mathrm{WF}_t u$ 表示函数 u 的 t 阶波前集(即指函数 u 的 $H^t_{\mathrm{loc}}(\Omega)$正则性被破坏的点$(x,\xi)$的集合), 则有

引理 4.1.3 *若 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$, 则 $\mathrm{WF}_{s+k}u\subset N^*_\Sigma$.*

证 由引理 4.1.2 已知 u 在$\Omega\backslash\Sigma$ 上属于 $H^{s+k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 而当 u 在Σ 上, 且$(x,\xi)\notin N^*_\Sigma$ 时, $\mathscr{M}_\Sigma$ 中向量场在这点是微局部椭圆的, 即存在微分算子 $P\in\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)$, 使 P 在(x,ξ)点是微局部椭圆的, 并且 $Pu\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 这就是说函数 u 在(x,ξ)微局部地属于 H^{s+k}, 故$(x,\xi)\notin\mathrm{WF}_{s+k}u$. 引理证毕.

从这一引理我们又一次看到余法分布空间与余法丛的联系, 这点我们在后面的讨论中将还会看到. 另外, 我们还应指出用余法分布空间来描述 Σ 上的奇性比用波前集来描述有更好的性质. 例如, 当 $s>n/2$ 时, $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$对通常函数乘积形成一个代数(这点我们将在后面给出证明), 但当 $n>1$ 时, 适合 $\mathrm{WF}_{s+k}u\subset N^*_\Sigma$ 的 u 一般不形成代数. 正因为这样, 在非线性偏微分方程的讨论中(特别是奇异性讨论中)余法分布空间是一个合适的框架.

下面我们将定义 4.1.1 推广到一般情形, 这时我们将不是相对一个光滑超曲面, 而是相对于多个光滑超曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$ 来考虑相应的余法分布空间(这里 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$ 可以有不同的维数, 也可以互相横截相交或相切). 当然我们可以类似于定理 4.1.1 引进一个同时切于这些光滑曲面的向量场, 但这样来定义显得过于粗糙并在实际非线性方程讨论中带来难以克服的困难. 例如, 当 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$ 均是余维数为 1 的光滑超曲面, 且它们沿一个余维数为 2 的光滑子流形 Γ 上两两横截相交, 那么同时切于 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$ 的向量场在 Γ 上过于平坦(即向量场在 Γ 上将高阶为零), 用这一向量场与严格双曲算子作交换子时, 交换子将不能被这一严格双曲算子与向量场本身线性表出(而在非线性方程解的奇异性研究中这一表出是至关重要的). 为此, 我们自然想到用某些特定的拟微分算子来代替向量场, 或者说用特定的一些拟微分算子来替代 $\mathrm{Diff}^k_\Sigma(\Omega)$.

先从一般情形开始.

记 L_j 是 j 阶的经典拟微分算子的集合. 设 $M_1,\cdots,M_p\in L_1$, 我们定义一个算子集合 $\mathscr{M}(\subset L_1)$为

$$M \in \mathscr{M} \Leftrightarrow M \in L_1\text{，且 } M = \sum_{j=1}^{p} A_j M_j + A_0,$$

$$A_l \in L_0 \quad (l = 0,1,\cdots,p). \tag{4.1.5}$$

这里 $M_1,\cdots,M_p$ 称为 $\mathscr{M}$ 的生成元. 由(4.1.5)易见，M 是否属于 $\mathscr{M}$ 仅依赖于 M 的主象征 $\sigma_1(M)$.

我们也可以说算子局部地或微局部地属于 $\mathscr{M}$. 对算子 N，若存在 $M\in\mathscr{M}$ 局部地在 x_0 附近(或微局部地在 (x_0,ξ_0) 附近)，使 $\sigma_1(M-N)=0$，则说 N 在 x_0 附近局部地(或在 (x_0,ξ_0) 附近微局部地)属于 $\mathscr{M}$. 我们还可以说 $\mathscr{M}$ 在某点附近局部(或微局部)地由 $\{N_j\}$ 生成. 这是指存在一组 L_1 的元素 $\{N_j\}$，使对 $\mathscr{M}$ 中任一元素 M，在 x_0(或 (x_0,ξ_0))附近，都存在 $A_j\in L_0$，使

$$\sigma_1(M - \sum_j A_j N_j) = 0.$$

$\{N_j\}$ 称为 $\mathscr{M}$ 的生成元.

为了使由 $\mathscr{M}$ 定义的余法分布空间是有意义的，我们还假设 $\mathscr{M}$ 是一个 Lie 代数，即对 $\mathscr{M}$ 的任意两个生成元 M_i,M_j，均有

$$[M_i,M_j] \in \mathscr{M}. \tag{4.1.6}$$

定义 4.1.4 *若对任意 $M_j\in\mathscr{M}$，函数 $u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且满足*

$$M_{i_1}\cdots M_{i_l} u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad l \leqslant k,$$

则称 u 是 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中相对于 $\mathscr{M}$ 的 k 阶余法分布. 所有满足这一性质的函数全体称为 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上相对于 $\mathscr{M}$ 的 k 阶余法分布空间，记为 $H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M})$.

注 1 我们还可推广以上定义到若干个算子集合的情形，即相对于 $\mathscr{M}_1,\cdots,\mathscr{M}_q$ 的余法分布空间 $H^{s,k_1,\cdots,k_q}(\Omega;\mathscr{M}_1,\cdots,\mathscr{M}_q)$. 在后面几节将在一些具体的情形下给出一些具体的定义，并给出相应的应用.

注 2 当超曲面不是光滑的情形下，拟微分算子集合 $\mathscr{M}$ 将被一些特定的仿微分算子替代，这一情形将在本章最后一节给予简短的介绍.

在前面几章我们已看到，在非线性问题的讨论中，函数空间是

否对乘法构成代数是至关重要的. 那么定义 4.1.4 给出的空间，当 $s>n/2$ 时能否构成代数呢? 遗憾的是这点从定义上是不能保证的. 事实上我们在 $\mathbf{R}^2$ 中若取 $M=(1-\Delta)^{-1/2}\partial_{x_1}\partial_{x_2}$，并记由 M 生成的算子集合为 $\mathscr{M}$(仅一个生成元的集合 $\mathscr{M}$ 当然是一个 Lie 代数)，显然当 α 充分大时，$|x_1|^\alpha,|x_2|^\alpha\in H^{s,\infty}(\Omega,\mathscr{M})$，但

$$|x_1|^\alpha \cdot |x_2|^\alpha \notin H^{s,\infty}(\Omega,\mathscr{M}).$$

所以我们必须对 $\mathscr{M}$ 再加上某种合适的条件.

定义 4.1.5 *对任意 $x_0\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\xi_1,\xi_2,\eta\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，若在 x_0 附近存在一组向量场 $Z_1,\cdots,Z_q$，使得*

1) 在 $(x_0,\xi_1),(x_0,\xi_2)$ 附近，$Z_j(j=1,\cdots,q)$ 微局部地属于 $\mathscr{M}$;

2) 对所有 $M\in\mathscr{M}$，都存在 $A_j\in L_0(j=1,\cdots,q)$，使得 M 在 (x_0,η) 附近微局部地由 $Z_1,\cdots,Z_q$ 生成:

$$M = \sum_{j=1}^{q} A_j Z_j;$$

则称 $\mathscr{M}$ 满足三点条件.

定义 4.1.6 *设 $\mathscr{M}\subset L_1$ 是由(4.1.5)定义的集合. 若 $\mathscr{M}$ 构成一个 Lie 代数并满足三点条件，则称 $\mathscr{M}$ 对余法分布是适合的.*

定理 4.1.7 *若 $\mathscr{M}$ 是对余法分布适合的算子集合，则当 $s>n/2$ 时，$H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M})$ 是一个代数.*

为了证明定理 4.1.7，我们还需作以下准备工作.

引理 4.1.8 *若 $u,v\in H^{s,1}(\Omega,\mathscr{M})$，$s>n/2$，且 $\mathscr{M}$ 对余法分布是适合的，则 $u\cdot v\in H^{s,1}(\Omega,\mathscr{M})$.*

证 作微局部的单位分解 $1=\sum e_j(\xi)$，其中 $e_j(\xi)$ 的支集含在 ξ 空间充分小的开锥中. 设 $E_j=E_j(\mathrm{D}_x)\in L_0$ 是以 $e_j(\xi)$ 为象征的算子. 那么对 $\mathscr{M}$ 中任意 M 我们有

$$M(u\cdot v) = \sum_{i,j_1,j_2} E_i M(E_{j_1}u \cdot E_{j_2}v). \tag{4.1.7}$$

对 Ω 中任意一点 x，我们仅需在 x 一充分小的邻域中讨论问题. 这时由三点条件知，对任意的 $\mathrm{supp}(E_i)\times\mathrm{supp}(E_{j_1})\times\mathrm{supp}(E_{j_2})$ 均可找到一组向量场 $\{Z_p\}$，使得

$$AM(Bu\cdot Cv)=\sum_p \mathrm{D}_p Z_p(Bu)(Cv),\qquad(4.1.8)$$

上式中的 A,B,C 即前面给出的 E_i,E_{j_1} 和 E_{j_2}，$\mathrm{D}_p\in L_0$. 由向量场的 Leibniz 公式有

$$AM(Bu\cdot Cv)=\sum \mathrm{D}_p(Z_pBu\cdot Cv)+\sum \mathrm{D}_p(Bu\cdot Z_pCv),\qquad(4.1.9)$$

由于 $Z_pB,Z_pC\in\mathcal{M}$，故 $Z_pBu,Z_pCv\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，再由 $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是一代数知 $AM(Bu\cdot Cv)\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，亦即 $uv\in H^{s,1}(\Omega,\mathcal{M})$. 引理证毕.

定理 4.1.7 之证明 我们对 k 用归纳法，先设 $H^{s,k-1}(\Omega,\mathcal{M})$ 为一代数，那么类似引理 4.1.8 的证明我们有(4.1.7)，既而有(4.1.9)，那么 Z_pBu,Cv,Bu,Z_pCv 均属于 $H^{s,k-1}(\Omega,\mathcal{M})$，再由归纳假设即知 $uv\in H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M})$，亦即 $H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M})$ 为一代数.

下面我们给出一些对余法分布适合的算子集合的例子. 首先我们应该注意到的一个简单但是很重要的事实是：当 $\mathcal{M}$ 由一组对交换子运算封闭的向量场生成时，$\mathcal{M}$ 自然是对余法分布适合的算子集合. 所以，在下面的讨论中我们总是首先考虑 $\mathcal{M}$ 是否能被一组向量场生成(如例 1 和例 2)，当 $\mathcal{M}$ 不能被一组向量场生成时再考虑验证它是否满足三点条件. 实际上，这就是验证 $\mathcal{M}$ 是否能"微局部地"被一组向量场生成(如例 3).

例 1 设 Σ 是一光滑子流形，$\mathcal{M}_1$ 是所有在 N^*_Σ 上主象征为零的一阶拟微分算子集合，那么我们可给定一局部坐标(x',x'')，且不妨认为 Σ 由 $\{x'=0\}$ 给出，这里 $x'=(x_1,\cdots,x_l)$，$x''=(x_{l+1},\cdots,x_n)$，那么可以验证

$$x_j\partial_{x_i}\ (i,j=1,\cdots,l),\ \partial_{x_{l+1}},\ \cdots,\ \partial_{x_n}\qquad(4.1.10)$$

构成 $\mathcal{M}_1$ 的生成元. 事实上，任取 $M\in\mathcal{M}_1$，设 M 的一次齐次主部为 $\sigma_1(M)=m(x,\xi)$，那么可写

$$m(x,\xi)=m_1(x,\xi)\xi_1+\cdots+m_n(x,\xi)\xi_n,\qquad(4.1.11)$$

其中 $m_j(x,\xi)=m(x,\xi)|\xi|^{-2}\xi_j\ (j=1,\cdots,n)$，显然 $m_j(x,\mathrm{D}_x)\in L_0$ $(j=1,\cdots,n)$. 在(4.1.11)式中分别取$(\xi_1,\cdots,\xi_l)=(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$；$(\xi_{l+1},\cdots,\xi_n)\equiv(0,\cdots,0)$，由 $m(x,\xi)$ 在

N^*_Σ 上为零，经过计算知存在 $a_{ij}\in S^0_{1,0}$，使得

$$m_i(x,\xi)=\sum_{j=1}^{l}a_{ij}(x,\xi)x_j,\quad i=1,\cdots,l.$$

将上式代入(4.1.11)即知 M 可由(4.1.10)中各元素(以 L_0 中元素为系数)表出. 这时，$\mathcal{M}_1$ 显然构成 Lie 代数且适合三点条件.

相对于光滑子流形 Σ，我们可定义两个余法分布空间 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$ 和 $H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M}_1)$（见定义 4.1.1 和定义 4.1.3）. 这两个空间的关系如何呢？事实上，由于 $\mathcal{M}_\Sigma\subset\mathcal{M}_1$，故 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)\supset H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M}_1)$. 又若任给 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$，下证 $M_{j_1}\cdots M_{j_k}u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，这里 $M_{j_i}\in\mathcal{M}_1$. 由于 M_{j_i} 可由(4.1.10)中元素表出，而(4.1.10)中元素均属于 $\mathcal{M}_\Sigma$，故 $M_{j_1}\cdots M_{j_k}$ 被表成若干项，其中每项由至多 k 个(4.1.10)的元素以及若干个零阶拟微分算子因子组成. 由于零阶拟微分算子是从 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$ 到 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$ 的有界算子(这点由数学归纳法易证)，所以由 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$ 可推出 $M_{j_1}\cdots M_{j_l}u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$l\leqslant k$，亦即 $u\in H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M}_1)$，这就证明了

$$H^{s,k}(\Omega,\Sigma)=H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M}_1).\qquad(4.1.12)$$

即是说对单个光滑子流形，用向量场来定义余法分布空间与用相应拟微分算子来定义的余法分布空间是一致的.

例 2 设 Σ_1,Σ_2 是两个余维数为 1 的光滑超曲面，它们横截交于一个余维数为 2 的光滑子流形 Γ. 我们可定义 $\mathcal{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ 是所有切于 Σ_1 和 Σ_2 的向量场集合，并相应地可定义

$$H^{s,k}(\Omega,\Sigma_1\cup\Sigma_2)=\{u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega);\ Z_{j_1}\cdots Z_{j_l}u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ l\leqslant k,\ Z_{j_i}\in\mathcal{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}\}.\qquad(4.1.13)$$

又可定义 $\mathcal{M}_2\subset L_1$，其中元素的主象征在 $N^*_{\Sigma_1},N^*_{\Sigma_2}$ 及 N^*_Γ 上均为零，在(4.1.13)中换 $\mathcal{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ 为 $\mathcal{M}_2$，则可相应地定义 $H^{s,k}(\Omega,\mathcal{M}_2)$.

以下的讨论与例 1 类似，因为本例在后面章节将会再次用到，故不妨用命题的形式给出.

命题 4.1.9 *$\mathcal{M}_2$ 可由 $\mathcal{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ 生成(不仅仅是微局部的).*

证 不妨设 $\Sigma_1=\{x_1=0\}$，$\Sigma_2=\{x_2=0\}$，$\Gamma=\{x_1=x_2=0\}$，易

见 $\mathscr{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ 的生成元为

$$x_1\partial_{x_1},\ x_2\partial_{x_2},\ \partial_{x_3},\ \cdots,\ \partial_{x_n}. \tag{4.1.14}$$

下面只需证(4.1.14)也构成 $\mathscr{M}_2$ 的生成元. 类似例 1 的讨论，任取 $M\in\mathscr{M}_2$，设 M 的一次齐次主部为 $\sigma_1(M)=m(x,\xi)$，那么可写

$$m(x,\xi)=m_1(x,\xi)\xi_1+\cdots+m_n(x,\xi)\xi_n,$$

其中 $m_j(x,\xi)=m(x,\xi)|\xi|^{-2}\xi_j(j=1,\cdots,n)$，显然 $m_j(x,D_x)\in L_0$ $(j=1,\cdots,n)$. 由 $m(x,\xi)$在 $N^*_{\Sigma_1}$ 与 $N^*_{\Sigma_2}$ 上为零知

$$m_1(x,\xi)=a_1(x,\xi)x_1+a_2(x,\xi)\xi_2+\cdots+a_n(x,\xi)\xi_n,$$
$$m_2(x,\xi)=b_1(x,\xi)\xi_1+b_2(x,\xi)x_2+\cdots+b_n(x,\xi)\xi_n.$$

再由 $m(x,\xi)$在 N^*_Γ 上为零知

$$a_2(x,\xi)=c_1(x,\xi)x_1+c_2(x,\xi)x_2+c_3(x,\xi)\xi_3+\cdots+c_n(x,\xi)\xi_n,$$
$$b_1(x,\xi)=d_1(x,\xi)x_1+d_2(x,\xi)x_2+d_3(x,\xi)\xi_3+\cdots+d_n(x,\xi)\xi_n.$$

那么综合以上各式，即有

$$m(x,\xi)=h_1(x,\xi)x_1\xi_1+h_2(x,\xi)x_2\xi_2+h_3(x,\xi)\xi_3+\cdots+h_n(x,\xi)\xi_n,$$

其中 $h_j(x,D_x)\in L_0$，故 M 由(4.1.14)各元素表出. 命题证毕.

命题 4.1.10 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma_1\cup\Sigma_2)=H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M}_2)$.

证 由 $\mathscr{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}\subset\mathscr{M}_2$ 即知 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma_1\cup\Sigma_2)\supset H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M}_2)$. 任取 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma_1\cup\Sigma_2)$，我们欲证 $M_{j_1}\cdots M_{j_l}u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，这里 $M_{j_1}\in\mathscr{M}_2$，$l\leqslant k$，这由命题 4.1.9 是显然的，故又有

$$H^{s,k}(\Omega,\Sigma_1\cup\Sigma_2)\subset H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M}_2).$$

命题证毕.

当然，有了以上两个命题，$\mathscr{M}_2$ 自然满足三点条件且成为一个 Lie 代数.

例 3 设 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_m$ 均是余维数为 1 的光滑超曲面$(m\geqslant3)$，它们沿一个余维数为 2 的光滑子流形 Γ 横截相交. 我们定义 $\mathscr{M}_3\subset L_1$，且其主象征在 $N^*_{\Sigma_1},\cdots,N^*_{\Sigma_m}$ 以及 N^*_Γ 上为零. 设 $x_0\in\Gamma$，任取 x_0 上三个方向 ξ_1,ξ_2,η，那么至少存在 $m-2$ 个曲面在点 x_0 不以 ξ_1 与 ξ_2 为法方向(因为这族曲面是横截相交的)，不妨记这 $m-2$ 个曲面为 $\Sigma_3,\cdots,\Sigma_m$. 又记 $\mathscr{M}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ 为切于 Σ_1 与 Σ_2 的向量场集合，$\mathscr{M}_2$ 的定义同例 2，那么

1) $\mathscr{M}_2$ 与 $\mathscr{M}_3$ 在(x_0,ξ_1)和(x_0,ξ_2)点重合.

又由 $\mathscr{M}_j(j=2,3)$定义显然有

2) $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{M}_2$，特别在$(x_0,\eta)$亦如此.

这样，由命题 4.1.9 与 1)知(不妨记 $\Sigma_1=\{x_1=0\}$，$\Sigma_2=\{x_2=0\}$)，(4.1.14)在(x_0,ξ_1)，(x_0,ξ_2)附近微局部地属于 $\mathscr{M}_3$. 由 2)知 $\mathscr{M}_3$ 在(x_0,η)附近可由(4.1.14)构成，故 $\mathscr{M}_3$ 满足三点条件. 而 $\mathscr{M}_3$ 构成一 Lie 代数，可由拟微分算子的象征计算证得. 故 $\mathscr{M}_3$ 亦对余法分布是适合的.

应该提出注意的是，当两个余维数为 1 的光滑超曲面沿一个余维数为 2 的光滑子流形横截相交时(即例 2)，$\mathscr{M}_2$ 可由向量场局部表出. 但当三个或三个以上余维数为 1 的光滑超曲面沿一个余维数为 2 的光滑子流形横截相交时(即例 3)，$\mathscr{M}_3$ 仅能由向量场微局部地表出，所以一般这时采用向量场定义的余法分布空间与用拟微分算子定义的余法分布空间是不一样的.

4.2 余法奇性的传播

关于非线性偏微分方程解的奇性的传播，我们在 2.5 节已作过介绍(见定理 2.5.3). 但值得注意的是，在定理 2.5.3 中有一个重要的限制条件，即 $t\leqslant2s-n/2-m-1$ (当 s 充分大时，$t\sim2s$，故文献上一般称之为"直到 $2s$ 阶的奇性"). 那么当 $t>2s-n/2-m-1$ 时(一些文献称之为"在 $2s$ 以外的奇性")奇性会怎样传播，多个奇性又会怎样传播和相互作用呢? 在 J.-M. Bony 的工作(即定理 2.5.3)以后，这是人们关心的一个重要问题. 在 Bony 工作的基础上，J.-Y. Chemin (见[Chem2])给出仿微分的双线性象征计算，从而将非线性偏微分方程在相差一个 $3s$ 阶的项的意义下转化为一个仿微分的双线性方程，并得到"直到 $3s$ 阶"的奇性传播定理. 但遗憾的是，希望沿这一思路得到更高阶的奇性的传播和奇性的相互作用

一般情形下是不可能的. 这点从 M. Beals [Bea1]的反例中可以看到.

M. Beals 在文[Bea1]中, 考虑方程$\Box u+\beta u^3=0$, 其中 β 是 C^∞ 类的函数, 存在这样的解 $u\in H^s$, 使其 Cauchy 数据在原点之外均为 C^∞ 的, 但 u 的奇性不仅仅出现在波锥表面, 也出现在这锥内部(这里它们大致是 H^{3s} 类的). 这一反例似乎完全破坏了这样一种想法, 即用奇性在次特征上的传播以及奇性的相互作用来描述"在 $3s$ 以外"的奇性传播.

尽管如此, 在以下三种情况下, 还是有可能对很大的 k (包括 $k=\infty$)得到关于 ks 阶的奇性的控制.

在一维空间的情形 Rauch 和 Reed [R-R2]在半线性情形下, 以及 Chemin [Chem1]在一般情形下给出了一个很完整的回答. 给定一个函数 $\rho(x)$, 使 u 的 Cauchy 数据在 x 的邻域属于 $H^{\rho(x)}$, 我们可以确定(由特征的传播和一系列相互作用)一个函数 $\sigma(t,x)$, 使解 u 在(x,t)的邻域内属于 $H^{\sigma(x,t)}$.

几何结构是解析的情形 假设在某时刻前奇性集中在一个超曲面上, 并且假设超曲面是解析的, Lebeau [Le1,2]的结果给出一个相当完整的回答(至少对于非线性波方程): 可以用一个在原则上是精密的算法, 构造出一系列 Lagrange 子解析流形, 而解的奇性集中于这些流形中.

余法奇性 这正是本章讨论的课题. 简单地说我们假设在某时刻前奇性集中在一个子流形上, 而且对其奇性的描述比波前集准确, 即为余法奇性, 那么我们在一些情形下可以得到这一时刻后奇性的描述.

应该特别指出的是, 在余法奇性这一框架中, 可以指望得到一般的结果. 至少在相当普遍的情形下是如此, 而且较前两种情形有更广阔的研究前景.

作为余法分布空间理论的最简单的应用, 也是余法奇性讨论中, 最简单的情况是考虑半线性偏微分方程奇性的传播. 我们希望在讨论余法奇性各种复杂的情形之前, 首先就这一最简单的情形给

出通常讨论余法奇性的几个主要环节与基本思想. 在读完以后几节, 读者将会发现, 尽管对余法奇性的讨论因为方程与问题的不同, 方法也大相径庭, 有的甚至是相当"技巧"的, 但其基本思想在这一节均已讲到.

在本节, 总假设 Σ 是一个 C^∞ 的超曲面, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的开集.

引理 4.2.1 *若 $s>n/2$, 则 $H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$是一个代数. 进一步, 若 $f(x,u)$对 x 及 u 均为 C^∞ 函数, $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$, 则*

$$f(x,u)\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma).$$

证 引理的前部分是定理 4.1.7 的特殊情况, 至于后半部分仅需对 $f(x,u)$用 $\mathscr{M}_\Sigma$ 中的向量场作用一次, 并用数学归纳法即可证明.

在本节, 我们考虑半线性方程

$$Pu=F(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u),\tag{4.2.1}$$

其中 P 是 m 阶具 C^∞ 实系数的线性微分算子, 右端函数 F 对它的变元 $x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u$ 为 C^∞ 函数. 令 $\xi=(\xi_1,\xi')$是 $x=(x_1,x')$的对偶变量(这里 $x'=(x_2,\cdots,x_n)$, $\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$), 用 $P(x_1,x',\xi_1,\xi')$记算子 P 的主象征. 在本章我们总假设:

(H.1) *$P(x_1,x',\xi_1,\xi')=0$ 对于 ξ_1 而言的实特征根均为单根;*

(H.2) *记 $\Omega_\pm=\Omega\cap\{\pm x_1>0\}$, 又设 Ω_+ 包含在 Ω_- 的影响区域内(即由 Ω_+ 中任意点引出的所有逆行次特征在出开集 Ω 前必先进入 Ω_-).*

定理 4.2.2 *设 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ $(s>n/2+m-1)$是(4.2.1)的解, 若算子 P 及开集 Ω,Ω_- 满足条件(H.1)和(H.2), 并且 $u\in H^{s+1}_{loc}(\Omega_-)$, 那么 $u\in H^{s+1}_{loc}(\Omega)$.*

证 这实际上是定理 2.5.2 和定理 2.5.3 的简单推论. 只需注意在定理 2.5.3 中假设 $s>n/2+m+2$, 但我们这里仅设 $s>n/2+m-1$. 这是因为在定理 2.5.3 中 $s>n/2+m+2$ 的假设是为了保证主象征对 x 有足够的光滑性, 从而保证积分曲线的唯一性(见 2.5 节). 而半线性方程(4.2.1)的主象征对 x 而言是 C^∞ 的, 故只需要

求 $s>n/2+m-1$ 以保证 $F(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u)\in H^{s-m+1}(\Omega)$，以及将(4.2.1)仿线性化后有足够好的余项.

注 定理 4.2.2 (以及定理 2.5.2、定理 2.5.3)可以应用到以下主象征具对角形的半线性方程组：

$$\begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1F_1(x,\cdots,\partial^\beta u_j,\cdots)\\ \vdots \\ L_NF_N(x,\cdots,\partial^\beta u_j,\cdots)\end{pmatrix}_{|\beta|\leqslant m-1},$$

这里 B 是 $m-1$ 阶 PsDO 的矩阵，$L_k(k=1,\cdots,N)$ 是 0 阶 PsDO，$F_k(k=1,\cdots,N)$ 是其变元 $x,\cdots,\partial^\beta u_j,\cdots$ 的 C^∞ 的函数.

设 Σ 是 P 的一特征曲面，由于 P 的系数为 C^∞，故 Σ 为一光滑超曲面，不失一般性，可设 $\Sigma=\{x_n=0\}$. 下面我们讨论方程(4.2.1)的解的奇性沿特征面 Σ 的传播.

定理 4.2.3 *设 $u\in H^s_{\rm loc}(\Omega)$ 是(4.2.1)的解($s>n/2+m$)，若算子 P 及开集 Ω,Ω_- 满足条件(H.1)和(H.2)，且 $u\in H^{s,k}(\Omega_-,\Sigma)$，则 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$.*

证 由于 $\Sigma=\{x_n=0\}$，故可写

$$P(x,\partial_x)=\sum_{j=1}^{n-1}A_j(x,\partial_x)\partial_{x_j}+x_na_n(x)\partial^m_{x_n}+A_0(x,\partial_x),\tag{4.2.2}$$

其中 $a_n(x)\in C^\infty$，$A_j(j=0,1,\cdots,m-1)$ 是 $m-1$ 阶偏微分算子. 若记 M_i 为 $\mathscr{M}_\Sigma$ 中任意向量场，则有

引理 4.2.4 *记 $M^I=M_{i_1}\cdots M_{i_l}$，$|I|=l$，那么*

$$[M^I,P]=\sum_{|J|\leqslant l}B_{J,I}M^J,\tag{4.2.3}$$

其中 $B_{J,I}$ 为 $m-1$ 阶偏微分算子.

证 由直接计算知

$$[\partial_{x_i},P]=\sum_{j=1}^{n-1}(\partial_{x_i}A_j)\partial_{x_j}+x_n(\partial_{x_i}a_n)\partial^m_{x_n}+\partial_{x_i}A_0\quad(i\neq n),$$

$$[x_n\partial_{x_n},P]=\sum_{j=1}^{n-1}[x_n\partial_{x_n},A_j]\partial_{x_j}+(\partial_{x_n}a_n)x_n^2\partial^m_{x_n}+[x_n\partial_{x_n},A_0].$$

因为 $[x_n\partial_{x_n},A_j]$ $(j=0,1,\cdots,n-1)$ 均为 $m-1$ 阶偏微分算子，且 $x_n\partial^m_{x_n}=\partial^{m-1}_{x_n}(x_n\partial_{x_n})-\partial^{m-1}_{x_n}$，故以上两式均可写成

$$[M_i,P]=\sum_jB_{i,j}M_j+B_{i,0},\tag{4.2.4}$$

其中 $B_{i,j},B_{i,0}$ 均为 $m-1$ 阶偏微分算子.

下设对 $|I|\leqslant k-1$ 时(4.2.3)式均成立，并记 $M^{\tilde I}=M_iM^I$，那么

$$[M^{\tilde I},P]=M_i[M^I,P]+[M_i,P]M^I,$$

由(4.2.3)，(4.2.4)两式有

$$\begin{aligned}[M^{\tilde I},P]&=M_i\Big(\sum_{|J|\leqslant k-1}B_{I,J}M^J\Big)+\Big(\sum_jB_{i,j}M_j+B_{i,0}\Big)M^I\\&=\sum_{|J|\leqslant k-1}B_{I,J}M_iM^J+\sum_{|J|\leqslant k-1}[M_i,B_{I,J}]M^J\\&\quad+\sum_jB_{i,j}M_jM^I+B_{i,0}M^I,\end{aligned}$$

可写为

$$[M^{\tilde I},P]=\sum_{|\tilde J|\leqslant k}B_{\tilde I,\tilde J}M^{\tilde J},$$

其中 $B_{\tilde I,\tilde J}$ 是 $m-1$ 阶偏微分算子，由归纳法知引理得证.

下面回到定理 4.2.3 的证明. 对 k 用归纳法. $k=0$ 时，定理的假设已告诉我们 $u\in H^s_{\rm loc}(\Omega)=H^{s,0}(\Omega,\Sigma)$，下设已知 $u\in H^{s,k-1}(\Omega,\Sigma)$，再证 $u\in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$.

取 $|I|\leqslant k$，用 M^I 同时作用于(4.2.1)两边，由引理 4.2.4 有

$$PM^Iu+\sum_{|J|\leqslant k}B_{I,J}M^Ju=M^IF(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u).\tag{4.2.5}$$

而

$$M^IF(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u)=F_I(x,u,\cdots,\partial^\beta M^{J'}u,\cdots)_{|\beta|\leqslant m-1,|J'|\leqslant k},$$

这里 F_I 是对变量 $x,u,\cdots,\partial^\beta M^{J'}u,\cdots$ 为 C^∞ 的函数. 令 U_k 是一个列向量，其分量 $u_1,\cdots,u_j,\cdots$ 分别表示 $u(x),\cdots,M^Ju(x),\cdots$ $(|J|\leqslant k)$，又令 F_k 是一列 C^∞ 函数，其分量分别为 $F,\cdots,F_I,\cdots$ $(|I|\leqslant k)$. 那么(4.2.5)可写为

$$PU_k+BU_k=F_k(x,\partial^\beta U_k)_{|\beta|\leqslant m-1},\tag{4.2.6}$$

其中 B 是一个以 $m-1$ 阶算子为元素的矩阵. 由归纳假设知 $U_k \in H^{s-1}(\Omega)$，而在 Ω_- 上，由定理 4.2.3 条件知 $U_k \in H^s(\Omega_-)$，对方程(4.2.6)用定理 4.2.2 就证得 $U_k \in H^s(\Omega)$，即 $u \in H^{s,k}(\Omega,\Sigma)$. 由归纳法知定理得证.

最后，作为一个小结我们回顾以下本节在余法奇性传播的讨论中的几个主要环节.

1) 找一个合适的描述余法奇性的向量场. 当 Σ 是三个以上的光滑超曲面之并时，这里向量场常被一特殊类型的拟微分算子来替代. 至于对非光滑的有限多个超曲面之并，建立一个合适的描述框架则更加困难(见 4.6 节).

2) 推广的 Leibniz 公式 $M(uv)=Mu\cdot v+u\cdot Mv$. 这显然是引理 4.2.4 证明的关键，对向量场 M 而言这一公式是平凡的，但当取 M 为拟微分算子后，它的证明将是复杂的.

3) 交换子关系(4.2.4). 在本章讨论中，交换子关系的证明是整个问题讨论的中心. 许多文献称本节所用的方法为交换子技术也正是这个道理.

4) 正则性传播定理(即定理 4.2.2). 这是整个讨论的基础.

在以后各节的讨论中，我们总是围绕以上 4 个环节展开.

4.3 余法奇性的相互作用(Ⅰ)

本节以及后面的几节，我们将在余法分布的框架下讨论非线性偏微分方程解的奇性的相互作用及反射. 我们将看到，一方面这些讨论较上一节有更丰富的内容，呈现出一些十分有趣的非线性现象(这在上一节是不曾看到的)；另一方面，虽然这些讨论原则上按上一节末尾提出的 4 个环节展开，但在具体证明中大量用到本书前三章的概念与技巧，可以看做是 PsDO, ParaDO 以及切向 ParaDO 在非线性偏微分方程上的重要应用. 同时，从后面几节的讨论中还可以看到，为了对较为复杂的几何状态来定义余法分布空间，引入高次微局部的概念(见第 7 章)是方便和必要的，从而为本书后面三章

作了一个铺垫.

由于余法奇性的相互作用的讨论涉及内容太多，而且所用方法大不相同，故我们将余法奇性的相互作用的讨论分为两节. 这一节仅讨论涉及三个特征面，且余法分布空间用向量场来定义. 下一节的讨论涉及多个特征面，而余法分布空间则用特定的一阶 PsDO 来定义.

设 Σ_1 和 Σ_2 是算子 P (见(4.2.1))的两个特征曲面，横截相交于余维数为 2 的子流形 Γ 上. 若从 Γ 出发还有另外的特征曲面，并且在 Ω_- 内方程(4.2.1)的解在 Σ_1 和 Σ_2 上出现余法奇性，我们将证明余法奇性除沿 Σ_1 和 Σ_2 传播外，在其他的特征面上会出现新的奇性，这一新奇性较原奇性弱，并满足所谓的"和规律"(见定理 4.3.1 的注 2). 这一新的奇性是线性方程中所没有的，故通常称之为"非线性奇性".

定理 4.3.1 *若 Σ_1 和 Σ_2 是算子 P 横截交于 Γ 的两个特征曲面，有且仅有另一个特征曲面 Σ_3 通过 $\Gamma=\Sigma_1\cap\Sigma_2$，$\Gamma\cap\Omega_-=\varnothing$，又设 $u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(s>n/2+m)$ 为(4.2.1)的解，在 Ω_- 内，u 在 Σ_j $(j=1,2)$ 附近属于 $H^{s+l_j,k_j}(\Omega_-,\Sigma_j)$ $(l_j+k_j=k,\ k_j\geqslant 0,\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2)$，在 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 外 $u\in H^{s+k}(\Omega_-)$，那么我们有*

1) 在 $\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3^+$ 之外，$u\in H^{s+k}(\Omega)$ $(\Sigma_3^+=\Sigma_3\backslash\Sigma_3^-$，$\Sigma_3^-$ 是 $\Sigma_3\backslash\Gamma$ 与 Ω_- 之交集不空的那一连通部分)；

2) 在 $\Sigma_j\backslash\Gamma$ $(j=1,2)$ 附近，$u\in H^{s+l_j,k_j}(\Omega,\Sigma_j)$；

3) 在 Σ_3^+ 附近，若记 $t_0=2s+l_1+l_2-n/2-m+1$，当 $t_0<s+k$ 时，$u\in H^{t_0,k_3}(\Omega,\Sigma_3^+)$ $(k_3=[s+k-t_0]$，$[a]$ 表示 a 的整数部分)；当 $t_0\geqslant s+k$ 时，则 $u\in H^{s+k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

注 1 当 $l_1=l_2$ 时(也就有 $k_1=k_2$)，定理 4.3.1 即是 J.-M. Bony [Bon4]的结果，而定理 4.3.1 是王维克在[Wa3]中给出的.

注 2 u 在 Σ_3^+ 附近属于 H^{t_0,t_3}，这里 t_0 大致等于 $(s+l_1)+(s+l_2)$，这通常称之为解的新奇性适合"和规律".

为证明定理 4.3.1，我们首先构造适合的向量场以及相应的余

法分布空间.

由于算子 P 具实 C^∞ 系数，特征面均为光滑超曲面，不失一般性可设 $\Sigma_3=\{x_n=0\}$，这时当然有 $\Gamma=\{x_1=g(x''),\ x_n=0\}$，$x''=(x_2,\cdots,x_{n-1})$，$g\in C^\infty$. 为讨论方便，我们需构造一 C^∞ 变换，在 Σ_3 不变的前提下将 Σ_1,Σ_2“拉平”.

引理 4.3.2 *存在一个 C^∞ 的坐标变换，使得在新坐标系中 Σ_1，Σ_2 可分别用方程 $y_1=y_n$，$y_1=-y_n$ 表示，而 Σ_3 仍保持不变，即 $\Sigma_3=\{y_n=0\}$.*

证 设 $\Sigma_j=\{x_1=\varphi_j(x'',x_n)\}$，$\varphi_j\in C^\infty(j=1,2)$. 因为 Σ_1 与 Σ_2 是横截相交于 Γ 上的，故进而可设

$$\varphi_1(x'',0)=\varphi_2(x'',0),\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x'',0)\neq\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}(x'',0).$$

由 $\varphi_j(j=1,2)$的以上性质我们可作如下坐标变换

$$\left.\begin{aligned} y_n&=\varphi_1(x'',x_n)-\varphi_2(x'',x_n),\\ y_1&=2x_1-\varphi_1(x'',x_n)-\varphi_2(x'',x_n),\\ y''&=(y_2,\cdots,y_{n-1})=x''. \end{aligned}\right\}\tag{4.3.1}$$

具体验证即知在坐标系(y_1,y'',y_n)下，$\Sigma_3=\{y_n=0\}$，$\Sigma_1=\{y_1=y_n\}$，$\Sigma_2=\{y_1=-y_n\}$. 引理成立.

以下讨论均在新坐标系下进行.

设 $\mathscr{M}_1$ 是切于 Σ_1 的向量场的集合，那么容易看出 $\mathscr{M}_1$ 有一组生成元为

$$\left.\begin{aligned} Z_1&=(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n}),\\ Z_n&=\partial_{y_1}+\partial_{y_n},\\ Z_j&=\partial_{y_j}\quad(j=2,\cdots,n-1). \end{aligned}\right\}\tag{4.3.2}$$

又设 $\mathscr{M}$ 是切于 $\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 的向量场的集合，那么

引理 4.3.3 *$\mathscr{M}$ 的生成元可取为*

$$\left.\begin{aligned} M_1&=y_n(y_1+y_n)(\partial_{y_1}+\partial_{y_n}),\\ M_j&=\partial_{y_j}\quad(j=2,\cdots,n-1),\\ M_n&=y_n(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n}),\\ M_{n+1}&=y_1\partial_{y_1}+y_n\partial_{y_n}. \end{aligned}\right\}\tag{4.3.3}$$

证 设 M 是 $\mathscr{M}$ 中任一元素，那么不妨记

$$M=\sum_{j=2}^{n-1}a_j(y)\partial_{y_j}+a_1(y)(\partial_{y_1}+\partial_{y_n})+a_n(y)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n}),$$

其中 $a_i(y)\ (i=1,\cdots,n)$均为 C^∞ 函数. 由于 M 是切于 Σ_1 和 Σ_2 的向量场，故可写

$$a_1(y)=(y_1+y_n)\bar{a}_1(y),\quad a_n(y)=(y_1-y_n)\bar{a}_n(y),$$

其中 $\bar{a}_1,\bar{a}_n\in C^\infty$. 这时

$$\begin{aligned} M=\sum_{j=2}^{n-1}a_j(y)\partial_{y_j}&+\bar{a}_1(y)(y_1+y_n)(\partial_{y_1}+\partial_{y_n})\\ &+\bar{a}_n(y)(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n}), \end{aligned}\tag{4.3.4}$$

又因为 M 是切于 Σ_3，就有

$$\bar{a}_1(y)-\bar{a}_n(y)=y_n\alpha(y),\quad \alpha\in C^\infty.\tag{4.3.5}$$

又用恒等式

$$(y_1+y_n)(\partial_{y_1}+\partial_{y_n})+(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n})=2(y_1\partial_{y_1}+y_n\partial_{y_n}),$$

(4.3.4)亦可写为

$$\begin{aligned} M=\sum_{j=2}^{n-1}a_j(y)\partial_{y_j}&+2\bar{a}_1(y)(y_1\partial_{y_1}+y_n\partial_{y_n})\\ &+(\bar{a}_1(y)+\bar{a}_n(y))(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n}), \end{aligned}$$

注意到 $M_{n+1}=y_1\partial_{y_1}+y_n\partial_{y_n}$ 是切于 Σ_3 的向量场，故$(\bar{a}_1(y)+\bar{a}_n(y))(y_1-y_n)(\partial_{y_1}-\partial_{y_n})$必须是切于 Σ_3 的，即必须有

$$\bar{a}_1(y)+\bar{a}_n(y)=y_n\beta(y),\quad \beta\in C^\infty.\tag{4.3.6}$$

综合(4.3.5)和(4.3.6)两式有

$$\bar{a}_1(y)=\frac{1}{2}y_n(\beta+\alpha),\quad \bar{a}_n(y)=\frac{1}{2}y_n(\beta-\alpha).$$

也就有

$$M=\sum_{j=2}^{n-1}a_j(y)M_j+\frac{1}{2}(\beta+\alpha)M_1+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)M_n.\tag{4.3.7}$$

即证得引理.

直接计算可以验证：

$$[Z_i,Z_j]=0,\tag{4.3.8}$$

$$\left.\begin{aligned}&[M_1,M_{n+1}]=-M_1,\\&[M_n,M_{n+1}]=-M_n,\\&[M_1,M_n]=(y_1+y_n)M_n+(y_1-y_n)M_1,\\&[M_i,M_j]=0\quad(i,j=2,\cdots,n-1),\end{aligned}\right\}\tag{4.3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&[Z_1,M_1]=(y_1^2-y_n^2)Z_n,\\&[Z_1,M_{n+1}]=0,\\&[Z_1,M_n]=(y_1-y_n)Z_1,\\&[Z_n,M_n]=Z_1,\\&[Z_n,M_1]=(3y_1+y_n)Z_n,\\&[Z_n,M_{n+1}]=Z_n,\\&\text{其他的交换子均为 }0.\end{aligned}\right\}\tag{4.3.10}$$

有了以上公式，我们可导出余法分布空间

$$H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)=\{u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega);\ M^IZ^Ju\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ |I|\leqslant k,\ |J|\leqslant l,\ M\in\mathscr{M},\ Z\in\mathscr{M}_1\}.\tag{4.3.11}$$

由于有了交换子公式(4.3.8),(4.3.9)及(4.3.10)，定义(4.3.11)是有意义的，交换 M^IZ^J 中任意向量场的次序，定义(4.3.11)也不需改变，特别地，有

$$H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)=\{u\in H^{s,k-1,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1),\ Mu\in H^{s,k-1,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1),\ M\in\mathscr{M}\},\tag{4.3.12}$$

$$H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)=\{u\in H^{s,k,l-1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1),\ Zu\in H^{s,k,l-1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1),\ Z\in\mathscr{M}_1\}.\tag{4.3.13}$$

引理 4.3.4 *若 $s>n/2$，$K\geqslant 0$，$l\geqslant 0$，则 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$ 是一个代数．又若 $f(y,u_1,\cdots,u_N)$ 对变元 $y,u_1,\cdots,u_N$ 为 C^∞ 函数，$u_j\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$ $(j=1,\cdots,N)$，则*

$$f(y,u_1(y),\cdots,u_N(y))\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1).$$

证 只需注意无论对 $\mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}_1$ 中的向量场均有相应的 Leibniz 公式，类似于引理 4.2.1，用(4.3.12),(4.3.13)两式和数学归纳法，即可证得本引理.

前面我们讨论了余法分布空间 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$ 的性质，下面我们将把算子 $P(y,\partial_y)$ 改写成特定的形式，以便于交换子关系的证明.

引理 4.3.5 *设 $p(y,\eta_1,\eta_n)$ 是 (η_1,η_n) 的 m 次齐次多项式，且在 Σ_j 的余法丛 $N^*_{\Sigma_j}(j=1,2,3)$ 上均为零，那么存在 (η_1,η_n) 的 $m-3$ 次齐次多项式 $q(y,\eta_1,\eta_n)$ 和 $m-1$ 次齐次多项式 $r(y,\eta_1,\eta_n)$，使得*

$$p(y,\eta_1,\eta_n)=q(y,\eta_1,\eta_n)(\eta_1^2-\eta_n^2)\eta_1+r(y,\eta_1,\eta_n)(y_1\eta_1+y_n\eta_n).\tag{4.3.14}$$

证 把 $p(y,\eta_1,\eta_n)$ 写成 $(\eta_1+\eta_n)$,$(\eta_1-\eta_n)$ 的多项式，并注意 $p(y,\eta_1,\eta_n)$ 在 $N^*_{\Sigma_j}(j=1,2)$ 上为零，而 $\Sigma_1=\{y_1=y_n\}$，$\Sigma_2=\{y_1=-y_n\}$，故有

$$\begin{aligned}p(y,\eta_1,\eta_n)=&\,p_1(y)(y_1+y_n)(\eta_1+\eta_n)^m\\&+p_2(y)(y_1-y_n)(\eta_1-\eta_n)^m\\&+p_3(y,\eta_1,\eta_n)(\eta_1^2-\eta_n^2),\end{aligned}$$

其中 $p_1,p_2\in C^\infty$，p_3 是 $m-2$ 次齐次多项式，且对 y 属于 C^∞(以下证明中出现的函数均为 C^∞ 的，不再一一声明)．注意以下恒等式

$$\begin{aligned}(y_1\pm y_n)(\eta_1\pm\eta_n)^2=&\,2(y_1\eta_1+y_n\eta_n)(\eta_1\pm\eta_n)\\&+(y_1\mp y_n)(\eta_n^2-\eta_1^2),\end{aligned}$$

那么就有

$$p(y,\eta_1,\eta_n)=q_1(y,\eta_1,\eta_n)(\eta_n^2-\eta_1^2)+r_1(y,\eta_1,\eta_n)(y_1\eta_1+y_n\eta_n),\tag{4.3.15}$$

这里 $q_1(y,\eta_1,\eta_n)$ 和 $r_1(y,\eta_1,\eta_n)$ 分别是 $m-2$ 次和 $m-1$ 次齐次多项式，故总可写：

$$\begin{aligned}q_1(y,\eta_1,\eta_n)&=q_2(y)\eta_n^{m-2}+q_3(y,\eta_1,\eta_n)\eta_1,\\r_1(y,\eta_1,\eta_n)&=r_2(y)\eta_n^{m-1}+r_3(y,\eta_1,\eta_n)\eta_1,\end{aligned}$$

代入(4.3.15)容易看到 η_n^m 的系数为 $q_2(y)+y_nr_2(y)$．但 $p(y,\eta_1,\eta_n)$ 在 $N^*_{\Sigma_3}$ 上为零，所以 $q_2(y)=y_nq_4(y)$，代入 $q_1(y,\eta_1,\eta_n)$ 就有

$$q_1(y,\eta_1,\eta_n)=q_4(y)(y_1\eta_1+y_n\eta_n)\eta_n^{m-3}+[-q_4(y)y_n\eta_n^{m-3}+q_3(y,\eta_1,\eta_n)]\eta_1.\tag{4.3.16}$$

综合(4.3.15)与(4.3.16)，取

$$q(y,\eta_1,\eta_n)=(-q_4(y)y_n\eta_n^{m-3}+q_3(y,\eta_1,\eta_n)),$$
$$r(y,\eta_1,\eta_n)=r_1(y,\eta_1,\eta_n)+q_4(y)\eta_n^{m-3}(\eta_n^2-\eta_1^2),$$

就证得(4.3.14).

引理 4.3.6 *1) 算子 $P(y,\partial_y)$ 可写成*

$$P(y,\partial_y)=Q(y,\partial_{y_1},\partial_{y_n})K+\sum_{j=2}^{n-1}A_j(y,\partial_y)M_j + A_{n+1}(y,\partial_y)M_{n+1}+A_0(y,\partial_y), \quad (4.3.17)$$

其中 $K=(\partial_{y_1}^2-\partial_{y_n}^2)\partial_{y_1}$，$Q$ 是 $m-3$ 阶偏微分算子，$A_j(y,\partial_y)$ $(j=0,2,\cdots,n-1,n+1)$ 是 $m-1$ 阶偏微分算子.

2) 存在一个 $3-m$ 阶拟微分算子 $H(y,\partial_y)$，使得

$$H\cdot P=K+\sum_{j=1}^{n+1}B_j(y,\partial_y)M_j+B_0(y,\partial_y), \quad (4.3.18)$$

其中 $B_j(y,\partial_y)$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$ 是 2 阶拟微分算子.

证 微分算子 P 中任一项若含有 $\partial_{y_2},\cdots,\partial_{y_{n-1}}$ 中任一个，则可写成 $A_jM_j(j=2,\cdots,n-1)$ 的形式. 而剩下的项仅含有 ∂_{y_1} 和 ∂_{y_n}，用引理 4.3.5 即可证得 1).

下证 2). 令 $\Delta=\{y_1=0,\ y_n=0\}$，由定理条件知过 Δ 的特征曲面仅有3个. 令 $q(y,\eta_1,\eta_n)$ 为 Q 的主象征，那么 q 在 $y_1=y_n=0$，$\eta_2=\cdots=\eta_{n-1}=0$ 上不为零. 若记 Γ_1 是 $\eta_2=\cdots=\eta_{n-1}=0$ 附近一充分小的开锥邻域，且不妨认为 Ω 也充分小，则 q 在 $\Omega\times\Gamma_1$ 上不为零，令 $\Gamma_2(\subset\subset\Gamma_1)$ 也是 $\eta_2=\cdots=\eta_{n-1}=0$ 的开锥邻域，$\varphi(\eta)$ 是一零次齐次的 C^∞ 函数，使 $\operatorname{supp}\varphi(\eta)\cap\Gamma_2=\varnothing$，$\varphi(\eta)|_{(\mathbb{R}^n\setminus\Gamma_1)\cap S^{n-1}}=1$. 令 Λ 是一 $m-3$ 阶拟微分算子，其象征

$$\lambda(\eta)=\alpha\varphi(\eta)(1+\eta_2^2+\cdots+\eta_{n-1}^2)^{(m-3)/2}.$$

我们可适当选择参数 α，使 $Q+\Lambda$ 为椭圆算子，由拟微分算子象征计算知存在一个 $3-m$ 阶算子 H 使

$$H(Q+\Lambda)=I+B_0'(y,\partial_y),$$

其中 I 是单位算子，B_0' 为 -1 阶算子. 由算子 Λ 的定义即知

$$HQ=I-H\Lambda+B_0'$$

$$=I+\sum_{j=2}^{n-1}\widetilde{B}_j(y,\partial_y)M_j+\widetilde{B}_0(y,\partial_y), \quad (4.3.19)$$

其中 $\widetilde{B}_j(j=0,2,\cdots,n-1)$ 为 -1 阶拟微分算子，由(4.3.19)及(4.3.17)即证得(4.3.18)，引理得证.

除了将 $P(y,\partial_y)$ 表成(4.3.17)形式外，有时还需用 $\mathscr{M}_1$ 的生成元表出 $P(y,\partial_y)$，即有

引理 4.3.7 *算子 $P(y,\partial_y)$ 亦可表为*

$$P(y,\partial_y)=\sum_{j=1}^{n}C_j(y,\partial_y)Z_j+C_0(y,\partial_y), \quad (4.3.20)$$

其中 $C_j(j=0,1,\cdots,n)$ 是 $m-1$ 阶偏微分算子.

(这一引理的证明是平凡的，留给读者作为一个练习.)

算子 K 与 $\mathscr{M}$ 及 $\mathscr{M}_1$ 的生成元之间的交换关系可直接计算得

$$\left.\begin{aligned}&[K,Z_j]=0\quad(j=2,\cdots,n),\\&[K,Z_1]=3K-(\partial_{y_1}-\partial_{y_n})\partial_{y_n}Z_n,\end{aligned}\right\}\quad (4.3.21)$$

$$\left.\begin{aligned}&[K,M_1]=(y_1+3y_n)K-(\partial_{y_1}+\partial_{y_n})^2M_{n+1},\\&[K,M_n]=(-y_1+3y_n)K+(\partial_{y_1}-\partial_{y_n})^2M_{n+1},\\&[K,M_j]=0\quad(j=2,\cdots,n-1),\\&[K,M_{n+1}]=3K.\end{aligned}\right\}\quad (4.3.22)$$

有了以上准备，下面讨论 P 与 $\mathscr{M}$ 及 $\mathscr{M}_1$ 生成元的交换子关系.

引理 4.3.8 *设 $Z^J=Z_{j_1}\cdots Z_{j_l}$，$M^I=M_{i_1}\cdots M_{i_k}$，$Z_{j_\alpha}\in\mathscr{M}_1$，$M_{i_\beta}\in\mathscr{M}$，则有*

$$[Z^J,P]=\sum_{|J'|\leqslant|J|}A_{J'}Z^{J'}, \quad (4.3.23)$$

$$[M^I,P]=\sum_{|I''|\leqslant|I|-1}Q_{I''}M^{I''}P+\sum_{|I'|\leqslant|I|}B_{I'}M^{I'}, \quad (4.3.24)$$

$$[Z^JM^I,P]=\sum_{|I''|\leqslant|I|-1,|J''|\leqslant|J|}Q_{I'',J''}Z^{J''}M^{I''}P + \sum_{|I'|\leqslant|I|,|J'|\leqslant|J|}C_{I',J'}Z^{J'}M^{I'}, \quad (4.3.25)$$

其中 $A_{J'},B_{I'},C_{I',J'}$ 均为 $m-1$ 阶拟微分算子，$Q_{I''},Q_{I'',J''}$ 均为零阶拟

微分算子.

证 (4.3.23)的证明完全类似于引理 4.2.4，这里将其证明略去. 下面用归纳法证(4.3.24). 当$|I|=1$时，取$M_j\in\mathscr{M}$，由引理 4.3.6 知

$$[M_j,P]=[M_j,QK]+\sum_i[M_j,A_iM_i]+[M_j,A_0].$$

由(4.3.9),(4.3.22)和(4.3.18)可得到

$$[M_j,P]=Q_jP+\sum_i B_{j,i}M_i+B_{j,0},\qquad(4.3.26)$$

这里Q_j是零阶拟微分算子，$B_{j,i}(i=0,1,\cdots,n+1)$是$m-1$阶拟微分算子. 设$|I|=k-1$时(4.3.24)成立，且记$M^{\tilde I}=M_jM^I$，则由(4.3.26)与归纳假设有

$$[M^{\tilde I},P]=(Q_jP+\sum_i B_{j,i}M_i+B_{j,0})M^I$$
$$+M_j(\sum Q_{I''}M^{I''}P+\sum B_{I'}M^{I'}).\qquad(4.3.27)$$

注意$M_jQ_{I''}=Q_{I''}M_j+[M_j,Q_{I''}]$，$M_jB_{I'}=B_{I'}M_j+[M_j,B_{I'}]$，

$$Q_jPM^I=Q_jM^IP+Q_j[P,M^I]$$
$$=Q_jM^IP+Q_j(-\sum Q_{I''}M^{I''}P-\sum B_{I'}M^{I'}),$$

其中$[M_j,Q_{I''}]$是零阶拟微分算子，$[M_j,B_{I'}]$是$m-1$阶拟微分算子，$Q_j,Q_jQ_{I''}$是零阶拟微分算子，$Q_jB_{I'}$是$m-1$阶拟微分算子，$|I|=|\tilde I|-1$. 把上面各式带入(4.3.27)并整理得

$$[M^{\tilde I},P]=\sum_{|\tilde I''|\leqslant|\tilde I|-1}Q_{\tilde I''}M^{\tilde I''}P+\sum_{|\tilde I'|\leqslant|\tilde I|}B_{\tilde I'}M^{\tilde I'},\qquad(4.3.28)$$

其中$Q_{\tilde I''}$是零阶拟微分算子，$B_{\tilde I'}$是$m-1$阶拟微分算子，由数学归纳法知(4.3.24)成立.

(4.3.25)可以从(4.3.23)与(4.3.24)推出，这里我们略去证明.

最后，我们回头证明定理 4.3.1. 实际上定理 4.3.1 是以下两命题的简单推论.

命题 4.3.9 *若$u\in H^{t,p,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$ $(t>m+n/2)$，且有$u\in$*

$H^{t,p+1,q}(\Omega_-;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$（或$u\in H^{t,p,q+1}(\Omega_-;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$），则$u\in H^{t,p+1,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$（或$u\in H^{t,p,q+1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$）.

证 由(4.3.25)我们有

$$PZ^JM^Iu=Z^JM^IPu+[P,Z^JM^I]u$$
$$=Z^JM^IF(y,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)-(\sum Q_{I'',J''}Z^{J''}M^{I''}P$$
$$+\sum C_{I',J'}Z^{J'}M^{I'})u.$$

而

$$Z^JM^IF(y,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)$$
$$=G_{I,J}(y,\cdots,\partial^\beta Z^{J'}M^{I'}u,\cdots)_{|J'|\leqslant|J|,\ |I'|\leqslant|I|,\ |\beta|\leqslant m-1},$$

若记U是一个列向量，其分量$u_1,\cdots,u_j,\cdots$分别表示$u(y),\cdots,Z^{J'}M^{I'}u(y),\cdots$ $(|J'|\leqslant|J|,\ |I'|\leqslant|I|)$，那么对$U$有以下方程组：

$$PU+BU=G(y,\cdots,\partial^\beta U,\cdots)_{|\beta|\leqslant m-1},\qquad(4.3.29)$$

其中B是一个$m-1$阶拟微分算子的矩阵，G是一C^∞函数列向量.

取重指标J,I满足$|J|\leqslant q$，$|I|\leqslant p+1$，则由命题条件知$U\in H^{t-1}(\Omega)$，而$U\in H^t(\Omega_-)$. 由定理 4.2.2 即知$U\in H^t(\Omega)$，亦即$u\in H^{t,p+1,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$. 若取重指标$J,I$满足$|J|\leqslant q+1$，$|I|\leqslant p$，则同法可证$u\in H^{t,p,q+1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$.

命题 4.3.10 *已知$u\in H^{t,p,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$ $(t>m+n/2)$. 当$p\leqslant t-m-n/2+1$时，u若在Σ_3^-附近属于$H^{t+p+q}(\Omega_-)$，则u在Σ_3^+附近属于$H^{t+p+q}(\Omega)$；当$p>t-m-n/2+1$时，u若在Σ_3^-附近属于$H^{t+q+\theta,p-\theta}(\Omega_-,\Sigma_3^-)$（整数$\theta\leqslant t-m-n/2+1$），则$u$在$\Sigma_3^+$附近属于$H^{t+q+\theta,p-\theta}(\Omega,\Sigma_3)$.*

证 对命题 4.3.9 的证明中的U取$|J|=q$，$|I|=\theta'$，其中

$$\theta'=\begin{cases}p-\theta, & \text{当 } p>t-m-\dfrac{n}{2}+1,\\ 0, & \text{当 } p\leqslant t-m-\dfrac{n}{2}+1,\end{cases}$$

则从命题条件知

$$\begin{cases} U \in H^{t,p}(\Omega,\mathscr{M}), & \text{当 } p \leqslant t-m-\frac{n}{2}+1, \\ U \in H^{t,\theta}(\Omega,\mathscr{M}), & \text{当 } p > t-m-\frac{n}{2}+1, \end{cases}$$

且在 Σ_3^- 附近有

$$\begin{cases} U \in H^{t+p}(\Omega_-), & \text{当 } p \leqslant t-m-\frac{n}{2}+1, \\ U \in H^{t+\theta}(\Omega_-), & \text{当 } p > t-m-\frac{n}{2}+1. \end{cases}$$

由定理 2.5.3 即知上式在 Σ_3^+ 附近也成立(因为我们考虑的是半线性偏微分方程，和定理 4.2.2 证明中所陈述的理由一样，这里仅需 $t>n/2+m$ 即可). 由 U 的定义可推出在 Σ_3^+ 附近有

$$\begin{cases} u \in H^{t+p+q}(\Omega), & \text{当 } p \leqslant t-m-\frac{n}{2}+1, \\ u \in H^{t+q+\theta,p-\theta}(\Omega,\Sigma_3^+), & \text{当 } p > t-m-\frac{n}{2}+1. \end{cases}$$

定理 4.3.1 之证明 不失一般性可假设 $l_2 \geqslant l_1$，且记 $l=l_2-l_1$，那么 $k_1-k_2=l$ (因为 $k_j+l_j=k$, $j=1,2$). 令 $t=s+l_1$，那么用命题 4.3.9 可证得 $u\in H^{s+l_1,k_2,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}_1)$，即

$$\begin{cases} u \in H^{s+l_1+k_2+l}, & \text{在 } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \text{ 附近}; \\ u \in H^{s+l_1,k_2+l}(\Omega,\Sigma_1), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 附近}; \\ u \in H^{s+l_1+l,k_2}(\Omega,\Sigma_2), & \text{在 } \Sigma_2 \text{ 附近}. \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} u \in H^{s+k}, & \text{在 } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \text{ 附近}; \\ u \in H^{s+l_1,k_1}(\Omega,\Sigma_1), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 附近}; \\ u \in H^{s+l_2,k_2}(\Omega,\Sigma_2), & \text{在 } \Sigma_2 \text{ 附近}. \end{cases} \tag{4.3.30}$$

又由命题 4.3.10，取 $t=s+l_1$, $p=k_2$, $q=l$, $\theta=s+l_1-m-n/2+1$，则在 Σ_3^+ 附近有

$$\begin{cases} u \in H^{s+l_1+k_2+l} = H^{s+k}, & \text{当 } k_2 \leqslant \theta; \\ u \in H^{s+l_1+(s+l_1-m-\frac{n}{2}+1)+l,k_3}(\Omega,\Sigma_3^+) \\ \quad = H^{2s+l_1+l_2-m-\frac{n}{2}+1,k_3}(\Omega,\Sigma_3^+), & \text{当 } k_2 > \theta, \end{cases} \tag{4.3.31}$$

这里 $k_3=[k_2-\theta]$. 取 $t_0=2s+l_1+l_2-m-n/2+1$，那么

$$t_0 = s+l_2+\theta = s+k+(\theta-k_2),$$

故 $t_0 \geqslant s+k$ (或 $t_0<s+k$)等价于 $k_2 \leqslant \theta$ (或 $k_2>\theta$)，那么(4.3.31)即表示在 Σ_3^+ 附近有

$$\begin{cases} u\in H^{s+k}, & \text{当 } t_0 \geqslant s+k; \\ u\in H^{t_0,k_3}(\Omega,\Sigma_3^+), & \text{当 } t_0<s+k,\ k_3=[s+k-t_0]. \end{cases} \tag{4.3.32}$$

由(4.3.30)与(4.3.32)即知定理 4.3.1 成立.

4.4 余法奇性的相互作用(Ⅱ)

这一节我们将继续讨论两个余法奇性的相互作用. 与上一节不同的是在 Σ_1 与 Σ_2 相交处有不止一个其他的特征曲面通过. 由于这一新情况的出现，用切于几个曲面的向量场来定义余法分布空间已显得粗糙和无效，故本节将引入一类拟微分算子来定义余法分布空间，并应用一些较上节更技术性的技巧来讨论两个余法奇性相互作用后奇性的传播及新奇性的出现. 本节的主要结论是

定理 4.4.1 *若 Σ_1 和 Σ_2 是算子 P 横截于 Γ 的两个特征曲面，且设有 $N-2$ 个特征曲面 $\Sigma_3,\cdots,\Sigma_N$ 通过 Γ $(3\leqslant N\leqslant m)$，$\Gamma\cap\Omega_-=\varnothing$，并且 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_N$ 这 N 个特征曲面两两横截交于 Γ 上；又设 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ $(s>n/2+m)$ 为(4.2.1)的解，在 Ω_- 内，u 在 Σ_j $(j=1,2)$ 附近属于 $H^{s+l_j,k_j}(\Omega_-,\Sigma_j)$ $(l_j+k_j=k,\ k_j\geqslant 0,\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2)$，$u$ 在 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 外属于 $H^{s+k}_{loc}(\Omega_-)$，那么我们有*

1) *在 $\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3^+\cup\cdots\cup\Sigma_N^+$ 之外，$u\in H^{s+k}(\Omega)$ ($\Sigma_i^+=\Sigma_i\backslash\Sigma_i^-$，$\Sigma_i^-$ 是 $\Sigma_i\backslash\Gamma$ 与 Ω_- 之交不空的那一连通部分)；*

2) *在 $\Sigma_j\backslash\Gamma$ $(j=1,2)$ 附近，$u\in H^{s+l_j,k_j}(\Omega,\Sigma_j)$；*

3) *在 Σ_i^+ $(i=3,\cdots,N)$ 附近，令 $t_0=2s+l_1+l_2-n/2-m+1$，则*

$$\begin{cases} u \in H^{t_0,k_3}(\Omega,\Sigma_i^+), & \text{当 } t_0 < s+k \text{ 时}, \\ u \in H^{s+k}_{\text{loc}}(\Omega), & \text{当 } t_0 \geqslant s+k \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $k_3=[s+k-t_0]$.

注 当 $l_1=l_2$ 时，定理 4.4.1 的结论首先由 J.-M. Bony[Bon4] 给出，这里给出的结论及下面的证明则是王维克[Wa3]在[Wa2]基础上的推广.

首先，因为特征超曲面均为 C^∞ 曲面，故可选取适当的坐标变换将 Σ_1 与 Γ 同时"拉直"，下面讨论中不妨设 $\Sigma_1=\{x_n=0\}$，$\Gamma=\{x_1=x_n=0\}$. 其余的 $N-1$ 个特征曲面分别记为

$$\Sigma_j=\{x_1=\varphi_j(x'',x_n)\} \quad (j=2,\cdots,N,\ x''=(x_2,\cdots,x_{n-1})).$$

特别值得注意的是：在这一坐标系下定理 4.4.1 中 N 个特征曲面两两横截相交的条件可表为

$$\partial_{x_n}(\varphi_i(x'',x_n)-\varphi_j(x'',x_n))\neq 0, \quad i\neq j. \tag{4.4.1}$$

不失一般性，我们设 $l_1\leqslant l_2$. 并记 $\mathscr{M}'$ 是切于 Σ_1 的向量场集合，$\mathscr{M}_j(j=1,\cdots,N)$ 是切于 Σ_j 与 Γ 的向量场集合，$\mathscr{M}_{i,j}(i,j=1,\cdots,N,\ i\neq j)$ 是切于 Σ_i 与 Σ_j 的向量场的集合. 经简单计算可以验证 $\mathscr{M}'$ 与 $\mathscr{M}_j$ 的生成元分别是

$$\mathscr{M}'=\{\partial_1,\cdots,\partial_{n-1},x_n\partial_n\}, \tag{4.4.2}$$

$$\mathscr{M}_1=\{x_1\partial_1,x_n\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_{n-1},x_n\partial_n\}, \tag{4.4.3}$$

其中 $\partial_j=\partial_{x_j}$. 而且 $\mathscr{M}'$ 与 $\mathscr{M}_j$ 显然对交换子运算是闭合的. 对 $\mathscr{M}_j(j=2,\cdots,N)$ 我们有

引理 4.4.2 *$\mathscr{M}_j(j=2,\cdots,N)$ 的生成元是*

$$\left.\begin{aligned} &x_n(\partial_n+a_j\partial_1), \quad (x_1-\varphi_j)(\partial_n+a_j\partial_1), \\ &(x_1-\varphi_j)\partial_1, \quad \partial_l+b_{j,l}\partial_1,\ 2\leqslant l\leqslant n-1, \end{aligned}\right\} \tag{4.4.4}$$

其中 $a_j=\partial_n\varphi_j$，$b_{j,l}=\partial_l\varphi_j$. 并且 $\mathscr{M}_j$ 对交换子运算是闭合的.

证 对任意固定的 $j\in\{2,\cdots,N\}$，作坐标变换

$$y_1=x_1-\varphi_j(x_2,\cdots,x_n),\quad y_i=x_i\quad (i=2,\cdots,n).$$

在新坐标系下 $\Sigma_j=\{y_1=0\}$ $(j=2,\cdots,N)$，显然在新坐标系下切于 Σ_j 和 Γ 的向量场的生成元为

$$y_1\partial_{y_1},\ y_1\partial_{y_n},\ \partial_{y_2},\ \cdots,\ \partial_{y_{n-1}},\ y_n\partial_{y_n}. \tag{4.4.5}$$

由多元函数的复合函数求导法则即知

$$\partial_{y_1}=\partial_{x_1},\quad \partial_{y_l}=\partial_{x_l}\varphi_j\partial_{x_1}+\partial_{x_l}\quad (l=2,\cdots,n), \tag{4.4.6}$$

将(4.4.6)代入(4.4.5)即得到(4.4.4). 至于 $\mathscr{M}_j$ 对交换子运算是闭合的，直接对(4.4.4)中各元验证即可. 引理得证.

对 $\mathscr{M}_{i,j}$ 我们亦可用引理 4.4.2 坐标变换的方法(这时需将两个特征面同时"拉直")找出它的生成元. 因本节不需要 $\mathscr{M}_{i,j}$ 生成元的具体表达，故这里不给出证明.

相对于 $\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_N$，我们定义 $\mathscr{M}$ 是 $L^1(\Omega)$ 的一个子集合，其中所有元素的主象征在 Σ_j 的余法丛 $N^*_{\Sigma_j}(j=1,\cdots,N)$ 及 Γ 的余法丛 N^*_Γ 上为零. 为下面讨论技术上的需要我们还定义 $\widetilde{\mathscr{M}}'$，$\widetilde{\mathscr{M}}_j(j=1,\cdots,N)$，$\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}(i,j=1,\cdots,N,\ i\neq j)$ 均为 $L^1(\Omega)$ 中的子集合，其中 $\widetilde{\mathscr{M}}'$ 的元素的主象征在 $N^*_{\Sigma_1}$ 上为零，$\widetilde{\mathscr{M}}_j$ 的元素的主象征在 $N^*_{\Sigma_j}\cup N^*_\Gamma$ 上为零，$\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}$ 的元素的主象征在 $N^*_{\Sigma_i}\cup N^*_{\Sigma_j}\cup N^*_\Gamma$ 上为零.

引理 4.4.3 1) $\mathscr{M}'\subset\widetilde{\mathscr{M}}'\subset L^0\mathscr{M}'+L^0$，

2) $\mathscr{M}_j\subset\widetilde{\mathscr{M}}_j\subset L^0\mathscr{M}_j+L^0$，

3) $\mathscr{M}_{i,j}\subset\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}\subset L^0\mathscr{M}_{i,j}+L^0$ $(i,j=1,\cdots,N)$.

证 1)的证明是显然的，我们仅证 2)与 3).

对 2)，我们仅讨论 $j=1$ 的情形. 当 $j\neq 1$ 时，可用类似于引理 4.4.2 的证明中"拉直"特征面的办法来处理. 因 $\mathscr{M}_1$ 的元素当然在 $N^*_{\Sigma_1}\cup N^*_\Gamma$ 上为零，故第一个"$\subset$"是显然的. 下证第二个"$\subset$". 任取 $M\in\widetilde{\mathscr{M}}_1$，由于 M 的主象征 $\sigma_1(M)$ 在 $N^*_\Gamma=\{(0,x_2,\cdots,x_{n-1},0;\ \xi_1,0,\cdots,0,\xi_n)\}$ 上为零，故

$$\begin{aligned}\sigma_1(M)=&A_1(x,\xi)x_1+A_2(x,\xi)x_n\\ &+B_1(x,\xi)\xi_2+\cdots+B_{n-2}(x,\xi)\xi_{n-1},\end{aligned}$$

其中 A_1,A_2 是 ξ 的一次齐次式，$B_j(j=1,\cdots,n-2)$ 是 ξ 的零次齐次式.

记 $A_j^k(x,\xi)=A_j(x,\xi)|\xi|^{-2}\xi_k(j=1,2,\ k=1,\cdots,n)$，那么可写

$$A_j(x,\xi)=A_j^1(x,\xi)\xi_1+\cdots+A_j^n(x,\xi)\xi_n,$$

显然 $A_j^k(x,D_x)\in L_0(j=1,2,\ k=1,\cdots,n)$. 这时

$$\sigma_1(M)=A_1^1(x,\xi)x_1\xi_1+A_1^n(x,\xi)x_1\xi_n$$
$$+A_2^1(x,\xi)x_n\xi_1+A_2^n(x,\xi)x_n\xi_n$$
$$+\overline{B}_1(x,\xi)\xi_2+\cdots+\overline{B}_{n-2}(x,\xi)\xi_{n-1},\qquad(4.4.7)$$

其中 $\overline{B}_l(x,\xi)=B_l+A_1^{l+1}x_1+A_2^{l+1}x_n$. 又因为 $\sigma_1(M)$ 在 $N^*_{\Sigma_1}=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},0;\ 0,\cdots,0,\xi_n)\}$ 上为零，故

$$A_1^n(x,\xi)x_1\xi_n=C_1(x,\xi)x_1x_n\xi_n+C_2(x,\xi)x_1\xi_n\xi_1$$
$$+\cdots+C_n(x,\xi)x_1\xi_n\xi_{n-1},$$

将上式代入(4.4.7)即证得 2).

对 3)，同 2)的证明，只需证明第二个"⊂". 任取 $M\in\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}$ (不妨设 $i,j\neq 1$，因若有一下标为 1，则情况更简单)，这时

$$\Sigma_i=\{x_1=\varphi_i(x'',x_n)\},\quad \Sigma_j=\{x_1=\varphi_j(x'',x_n)\}.$$

我们可选取新坐标系 $(y_1,\cdots,y_n)$，使

$$\Sigma_i=\{y_1=0\},\ \Sigma_j=\{y_n=0\},\ \Gamma=\{y_1=y_n=0\}.$$

(例如令 $y_1=x_1-\varphi_i(x'',x_n)$, $y''=x''$, $y_n=x_1-\varphi_j(x'',x_n)$，由横截条件知这一变换是可逆的.) 这时 $\mathscr{M}_{i,j}$ 的生成元为

$$y_1\partial_{y_1},\ \partial_{y_2},\ \cdots,\ \partial_{y_{n-1}},\ y_n\partial_{y_n}.\qquad(4.4.8)$$

由命题 4.1.9 知在新坐标系下 $\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}$ 可被 $\mathscr{M}_{i,j}$ 所表出，就有

$$M\in L^0\mathscr{M}_{i,j}+L^0.$$

引理证毕.

注 这里 $\mathscr{M}',\mathscr{M}_j,\mathscr{M}_{i,j}$ 均是至多相对于两超曲面的向量场，而引理 4.4.3 说明在这种情形下用拟微分算子的子集合来描述余法分布空间与用向量场描述是等价的. 但当讨论的对象是两个以上的横截相交的超曲面时，引理 4.4.3 是不成立的. 例如在 $\mathbf{R}^2$ 中，令

$$\Sigma_1=\{x_1=0\},\ \Sigma_2=\{x_1+x_2=0\},\ \Sigma_3=\{x_1-x_2=0\},$$

那么切于 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 的向量场 $\mathscr{M}$ 可由以下向量场生成

$$x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1(x_1+x_2)(\partial_1+\partial_2),\ x_1(x_1-x_2)(\partial_1-\partial_2).$$

若记 $\widetilde{\mathscr{M}}\subset L^1(\Omega)$，其元素主象征在 $N^*_{\Sigma_1}\cup N^*_{\Sigma_2}\cup N^*_{\Sigma_3}\cup N^*_\Delta$ ($\Delta=\{x_1=0,\ x_2=0\}$) 上为零，则显然以

$$x_1\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$$

为象征的算子属于 $\widetilde{\mathscr{M}}$，但它不可能表成 $L^0\mathscr{M}+L^0$ 的形式.

引理 4.4.4 *若 $M\in\mathscr{M}$，则可表为*

$$M=\sum_{j=1}^N\Big(\sum_l A_{j,l}Z_{j,l}+A_{j,0}\Big),$$

其中 $A_{j,l},A_{j,0}$ 为零阶拟微分算子，而 $Z_{j,l}\in\mathscr{M}_j$.

证 我们作微局部单位分解 $\sum_{j=1}^N\varphi_j(x,\xi)=1$，其中 $\varphi_j(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}))$，且对 ξ 为零次齐次，$\varphi_j(x,\xi)$ 的支集在 $N^*_{\Sigma_j}$ $(j=2,\cdots,N)$ 附近，$\varphi_1(x,\xi)$ 的支集在 $\bigcup_{j=2}^N N^*_{\Sigma_j}$ 之外. 又记 $\Phi_j(x,D_x)$ 是以 $\varphi_j(x,\xi)$ 为象征的拟微分算子，若 $M\in\mathscr{M}$，则令 $M_j=\Phi(x,D_x)M$. 因为 M_j 的主象征 $\sigma_1(M_j)$ 在 $N^*_{\Sigma_j}\cup N^*_\Gamma$ 上为零，故在 $\varphi_j(j=2,\cdots,N)$ 的支集中 M 可视为 $\widetilde{\mathscr{M}}_j$ 的元素. 由引理4.4.3之 2)有

$$M_j=\sum_l A_{j,l}Z_{j,l}+A_{j,0},$$

其中 $A_{j,l},A_{j,0}\in L^0(\Omega)$, $Z_{j,l}\in\mathscr{M}_j(j=2,\cdots,N)$. 故引理得证.

注 从引理的证明可以看出 $A_{j,l}$ 的主象征在 $\bigcup_{i\neq j}N^*_{\Sigma_i}$ 上为零.

引理 4.4.5 1) $[\mathscr{M}',\mathscr{M}_j]=\mathscr{M}'+\mathscr{M}_j(j=1,\cdots,n)$.

2) $[\mathscr{M}',\mathscr{M}]=L^0\mathscr{M}'+L^0\mathscr{M}+L^0$.

证 1) 由 $\mathscr{M}',\mathscr{M}_j$ 的生成元(4.4.2),(4.4.3)与(4.4.4)，通过具体计算交换子即知 1)成立. 事实上，例如

$$[x_n\partial_n,(x_1-\varphi_j)(\partial_n+a_j\partial_1)]$$
$$=(x_1-\varphi_j)(-\partial_n+x_n(\partial_na_j)\partial_1)+(-a_jx_n)(\partial_n+a_j\partial_1)$$
$$=-(x_1-\varphi_j)(\partial_n+a_j\partial_1)-a_j(x_n\partial_n)$$
$$+(x_1-\varphi_j-a_jx_n)(a_j\partial_1),$$

而 $(x_1-\varphi_j)(\partial_n+a_j\partial_1)\in\mathscr{M}_j$, $a_j(x_n\partial_n)+(x_1-\varphi_j-a_jx_n)(a_j\partial_1)\in\mathscr{M}'$，即这一情形时 1)成立，其他情形亦可如此验证.

2) 设 $Z\in\mathscr{M}'$, $M\in\mathscr{M}$，那么

$$[M,Z]=\sum_{j=1}^{N}\sum_{l}([A_{j,l}Z_{j,l},Z]+[A_{j,0},Z])$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{l}A_{j,l}[Z_{j,l},Z]+\sum_{l}[A_{j,l},Z]Z_{j,l}+[A_{j,0},Z]\Big).$$

由 1)知$[Z_{j,l},Z]\in\mathscr{M}'+\mathscr{M}_j$. 由$A_{j,l}$的构成知(见引理 4.4.4 的注)在$\bigcup_{i\neq j}N^*_{\Sigma_i}$上为零，而$\mathscr{M}_j$的元素在$N^*_{\Sigma_j}$与$N^*_{\Gamma}$上均为零，故$A_{j,l}[Z_{j,l},Z]\in L^0\mathscr{M}'+L^0\mathscr{M}$. 同理知$[A_{j,l},Z]Z_{j,l}\in L^0\mathscr{M}$. 再注意$[A_{j,0},Z]\in L^0(\Omega)$即知引理的 2)得证.

定义 4.4.6 *若 $u\in H^s_{loc}(\Omega)$，且 $M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l}}u\in H^s_{loc}(\Omega)$，则称 $u\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$. 其中 $M_{i_j}\in\mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}'$，并要求属于 $\mathscr{M}$ 的 M_{i_j} 有 k 个，属于 $\mathscr{M}'$ 的 M_{i_j} 有 l 个.*

引理 4.4.7 *若 $T_0\in L^0(\Omega)$，则 T_0 将 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$ 映射到自身.*

证 实际上只需证明若 $u\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$，则

$$M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l}}T_0u\in H^s_{loc}(\Omega).$$

显然 $k+l=0$ 时结论成立，现设 $k+l\leqslant h$ 时结论成立，再证 $k+l=h+1$ 时结论亦成立. 取 $M\in\mathscr{M}$(或 $\mathscr{M}'$)，若 $u\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$，则由定义知对 $M\in\mathscr{M}$ (或 $\mathscr{M}'$)，$Mu\in H^{s,k-1,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$ (或 $H^{s,k,l-1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$)，用归纳假设，有

$$M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l-1}}T_0Mu\in H^s_{loc}(\Omega),$$

但 $T_0Mu=MT_0u+[T_0,M]u$，$[T_0,M]\in L^0(\Omega)$，记 $T_0'=[T_0,M]$，则有

$$M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l-1}}T_0Mu=M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l-1}}MT_0u+M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l-1}}T_0'u,$$

由归纳假设知上式右端第二项属 $H^s_{loc}(\Omega)$，故 $M_{i_1}\cdots M_{i_{k+l-1}}MT_0u\in H^s_{loc}(\Omega)$，由数学归纳法知引理成立.

由引理 4.4.5 之 2)，引理 4.4.7 及 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{M}'$ 对交换子运算是封闭的这一简单的事实($\mathscr{M}$ 对交换子运算封闭由 4.1 节的例 3 知，而 $\mathscr{M}'$对交换子运算封闭留给读者作为一简单的练习)我们可将 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$的定义写成以下各种形式.

若记 $M^I=M_{i_1}\cdots M_{i_{|I|}}$，$Z^J=Z_{j_1}\cdots Z_{j_{|J|}}$，则

$$H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')=\{u\in H^s_{loc}(\Omega);\ M^IZ^Ju\in H^s_{loc}(\Omega)\}$$
$$=\{u\in H^s_{loc}(\Omega);\ Z^JM^Iu\in H^s_{loc}(\Omega)\},\tag{4.4.9}$$

其中 $M\in\mathscr{M}$，$Z\in\mathscr{M}'$，$|I|\leqslant k$，$|J|\leqslant l$. 还可写作

$$H^{s,k+1,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')=\{u\in H^{s,k,l},\ Mu\in H^{s,k,l},\ M\in\mathscr{M}\},\tag{4.4.10}$$

$$H^{s,k,l+1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')=\{u\in H^{s,k,l},\ Zu\in H^{s,k,l},\ Z\in\mathscr{M}'\}.\tag{4.4.11}$$

特别地，我们还定义

$$H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})=H^{s,k,0}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}'),\tag{4.4.12}$$

也就有

$$H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')=\{u\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}),\ Z^Ju\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}),\ Z\in\mathscr{M}',\ |J|\leqslant l\}.\tag{4.4.13}$$

为了下面证明的方便，我们再引入余法分布空间

$$H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}^*)=\{u\in H^s_{loc}(\Omega),\ M^Iu\in H^s_{loc}(\Omega),\ M\in\mathscr{M}^*,\ |I|\leqslant k\},\tag{4.4.14}$$

其中 $\mathscr{M}^*\subset L^1$ 且对余法分布是适合的(当然包含 $\mathscr{M}^*$ 为向量场的集合的情形). 在本节的证明中，$\mathscr{M}^*$ 将具体表为 $\mathscr{M}_{i,j}$，$\widetilde{\mathscr{M}}_{i,j}$ 等.

用类似证明引理 4.4.7 的方法我们得到

引理 4.4.8 *若 $T_0\in L^0(\Omega)$，则 T_0 将 $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}^*)$映到自身.*

引理 4.4.9 $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})=\overset{N}{\underset{j=1}{+}}H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j)$.

证 由于 $\widetilde{\mathscr{M}}_j\supset\mathscr{M}$，我们有 $H^{s,k}(\Omega;\widetilde{\mathscr{M}}_j)\subset H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$. 另一方面，由引理 4.4.3 知 $\mathscr{M}_j\subset\widetilde{\mathscr{M}}_j\subset L^0\mathscr{M}_j+L^0$，再由引理 4.4.8 得

$$H^{s,k}(\Omega;\widetilde{\mathscr{M}}_j)=H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j),$$

故 $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j)\subset H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$.

反过来，任给 $u\in H^{s,1}(\Omega,\mathscr{M})$，作同于引理 4.4.4 证明中的单位分解 $1=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x,\xi)$，并令 $u_j=\Phi_j(x,D_x)u$ (这里$\Phi_j(x,D_x)$是以

$\varphi_j(x,\xi)$为象征的拟微分算子). 对 $Z\in\mathscr{M}_j$，考虑 $Zu_j=(Z\Phi_j(x,\mathrm{D}_x))u$，因为 Z 的主象征在 $N^*_{\Sigma_j}\cup N^*_\Gamma$ 上为零，$\Phi_j(x,\mathrm{D}_x)$的主象征在$\bigcup_{i\neq j}N^*_{\Sigma_i}$上为零，故 $Z\Phi_j(x,\mathrm{D}_x)\in\mathscr{M}$. 所以 $Zu_j=(Z\Phi_j(x,\mathrm{D}_x))u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，即 $u_j\in H^{s,1}(\Omega;\mathscr{M}_j)$. 用数学归纳法即知 $u_j\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j)$. 综合以上证明就有

$$u\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})\Leftrightarrow u=\sum_{j=1}^N u_j,\quad u_j\in H^{s,k}(\Omega,\mathscr{M}_j).$$

引理证毕.

引理 4.4.10 1) *若 $s>n/2$，$k\geqslant 0$，则 $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$形成一个代数. 一般地，若 $F(x,u)$为其变元的 C^∞ 函数，那么由 $u\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$即知 $F(x,u)\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$.*

2) *若 $u\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$，则对任意 $M^I=M_{i_1}\cdots M_{j_h}$，$h\leqslant k$，$M_{i_j}\in\mathscr{M}$，有*

$$M^IF(x,u)=\sum_{|J|\leqslant|I|}T_{B_J}M^Ju+R,\tag{4.4.15}$$

其中 $T_{B_J}\in\mathrm{Op}(\Sigma^0_{s-n/2})$，$R\in H^{2s-n/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

证 1) $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$成代数，是定理 4.1.7 与 4.1 节的例 3 的简单推论. 以下只需证明 $F(x,u)\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$. 为使记号简单，我们不妨设 F 仅依赖于 u. 又因为我们讨论的问题均为局部的，故不妨认为 F 对 u 具紧支集，于是

$$F(u(x))=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u(x)}\hat{F}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

用引理 4.4.9 对 u 作分解为 $u=\sum_{j=1}^N u_j$，即得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u(x)}=\prod_{j=1}^N \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u_j(x)},$$

因 $u_j\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j)$，故由引理 4.3.4 知 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u_j(x)}\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M}_j)$. 再由引理 4.4.9 就有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u_j(x)}\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$. 最后由 $H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$成代数知 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u(x)}\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$，故 $F(u)\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$.

2) 对 $M\in\mathscr{M}$，由引理 4.4.4 有

$$MF(u)=\sum_{j=1}^N\Big(\sum_l A_{j,l}Z_{j,l}+A_{j,0}\Big)F(u)$$
$$=\sum_{j=1}^N\Big(\sum_l A_{j,l}\frac{\partial F}{\partial u}Z_{j,l}u+A_{j,0}F\Big).$$

并且由引理 4.4.4 之注知 $A_{j,l}$ 的主象征的支集在 $N^*_{\Sigma_j}$ 附近. 作 $\psi(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\setminus\{0\}))$，其支集亦在 $N^*_{\Sigma_j}$附近，但在 $A_{j,l}$的主象征的支集上为 1. 记

$$R=\sum_{j=1}^N R_j(u),\quad R_j(u)=\sum_l A_{j,l}\frac{\partial F}{\partial u}(1-\psi_j(x,\mathrm{D}_x))Z_{j,l}u,$$

即有

$$MF(x,u)=\sum_{j=1}^N\Big(\sum_l A_{j,l}\frac{\partial F}{\partial u}\psi_j(x,\mathrm{D}_x)Z_{j,l}u+A_{j,0}F\Big)+R.$$

而 $\psi_j(x,\mathrm{D}_x)Z_{j,l}\in\mathscr{M}$，$R$ 是一充分光滑的函数(因 $A_{j,l}$象征支集与 $1-\psi(x,\mathrm{D}_x)$象征支集不相交). 递推地作下去有

$$M^IF(u)=\sum_{|J_1|+\cdots+|J_l|\leqslant|I|}A_{J_1\cdots J_l}(G_{J_1\cdots J_l}M^{J_1}u\cdots M^{J_l}u)+R_I,\tag{4.4.16}$$

其中 $A_{J_1\cdots J_l}\in L^0(\Omega)$，$G_{J_1\cdots J_l}=G_{J_1\cdots J_l}(u)$是 u 的 C^∞函数，R_I 是充分光滑的函数. 对(4.4.16)作仿线性化(这时候需用本引理的 1)以保证 $G_{J_1\cdots J_l}(u)\in H^{s,k}(\Omega;\mathscr{M})$即证得(4.4.15).

注 当 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_p)$为一向量值函数时，用类似于引理 4.4.10 的证明方法(当然叙述会繁杂得多)可以证明引理 4.4.10 的结论对向量值函数也是成立的，只是(4.4.15)相应变为

$$M^IF(x,u_1,\cdots,u_p)=\sum_{j=1}^p\sum_{|J|\leqslant|I|}T_{B_{j,J}}M^Ju_j+R.\tag{4.4.15$'$}$$

对空间 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$我们有与引理 4.4.10 平行的结论：

引理 4.4.11 *若 $s>n/2$，$k\geqslant 0$，$l\geqslant 0$，则 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$形成一个代数. 一般地，若 $F(x,u_1,\cdots,u_p)$对其变元 $x,u_1,\cdots,u_p$ 为 C^∞ 函数，那么由 $u_1(x),\cdots,u_p(x)\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$即知*

$$F(x,u_1,\cdots,u_p)\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}').$$

更进一步，对任意 $M^I=M_{i_1}\cdots M_{i_k}$，$Z^J=Z_{j_1}\cdots Z_{j_l}$，$M_{i_\alpha}\in\mathscr{M}$，$Z_{j_\beta}\in\mathscr{M}'$，有

$$Z^JM^IF(x,u_1,\cdots,u_p)=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{|J'|\le|J|,|I'|\le|I|}T_{B_{j,J',I'}}Z^{J'}M^{I'}u_j\Big)+R. \tag{4.4.17}$$

其中 $T_{B_{j,J',I'}}\in\mathrm{Op}(\Sigma^0_{s-n/2})$，$R\in H^{2s-n/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

证 $Z\in\mathscr{M}'$为一向量场，用复合函数求导的链法则即可以引理4.4.10为基础，对 l 归纳地证得 $H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$成代数，且 $F(x,u_1,\cdots,u_p)\in H^{s,k,l}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$. 同样，由链法则知

$$Z^IF(x,u_1,\cdots,u_p)=G(x,u_1,\cdots,u_p,\cdots,Z^{J'},\cdots)_{|J'|\le|J|},$$

这里 G 对变元 $x,u_1,\cdots,u_p,\cdots,Z^{J'},\cdots$ 为 C^∞ 函数，对函数 G 用引理4.4.10即证得本引理.

引理 4.4.12 设 $M^I=M_{i_1}\cdots M_{i_k}$，$Z^J=Z_{j_1}\cdots Z_{j_l}$，$M_{i_\alpha}\in\mathscr{M}$，$Z_{j_\beta}\in\mathscr{M}'$，则我们有

$$[Z^J,P]=\sum_{|J'|\le|J|}A_{J'}Z^{J'}, \tag{4.4.18}$$

$$[M^I,P]=\sum_{|I''|<|I|}Q_{I''}M^{I''}P+\sum_{|I'|\le|I|}B_{I'}M^{I'}, \tag{4.4.19}$$

$$[M^IZ^J,P]=\sum_{|I''|<|I|,|J''|\le|J|}Q_{I'',J''}M^{I''}Z^{J''}P+\sum_{|I'|\le|I|,|J'|\le|J|}C_{I',J'}M^{I'}Z^{J'}, \tag{4.4.20}$$

其中 $A_{J'},B_{I'},C_{I',J'}\in L^{m-1}(\Omega)$，$Q_{I''},Q_{I'',J''}\in L^0(\Omega)$.

证 (4.4.18)即(4.2.3). 下证(4.4.19). 用数学归纳法先证 $|I|=1$ 的情形. 由引理4.4.4知

$$[M,P]=\sum_{j=1}^{N}\Big[\sum_{l}A_{j,l}Z_{j,l}+A_{j,0},P\Big].$$

在上式不同的项中，我们将 P 写成不同形式. 因 Σ_1 是算子 P 的特征，由条件(H.1)可得

$$P=P_1\Big(\partial_1+\sum_{l=2}^{n-1}\alpha_{1,l}\partial_l+\alpha_{1,n}x_n\partial_n\Big)=P_1\Big(\partial_1+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_{1,l}Z_{1,l}\Big),$$

其中 $Z_{1,l}\in\mathscr{M}_1$，P_1 是 $m-1$ 阶拟微分算子，$\alpha_{1,l}$是0阶拟微分算子. 又因 $\Sigma_j(j=2,\cdots,N)$是算子 P 的特征，故用(4.4.4)的记号可得

$$P=P_j\Big(\partial_n+a_j\partial_1+\alpha_{j,1}(x_1-\varphi_j)\partial_1+\sum_{l=2}^{n-1}\alpha_{j,l}(\partial_l+b_{j,l}\partial_1)\Big)$$

$$=P_j\Big(\partial_n+a_j\partial_1+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_{j,l}Z_{j,l}\Big),$$

其中 $Z_{j,l}\in\mathscr{M}_j$，P_j 是 $m-1$ 阶拟微分算子，$\alpha_{j,l}$是0阶拟微分算子. 那么

$$[M,P]=\Big[\sum_{l}A_{1,l}Z_{1,l}+A_{1,0},\ P_1\Big(\partial_1+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_{1,l}Z_{1,l}\Big)\Big]$$

$$+\sum_{j=2}^{N}\Big[\sum_{l}A_{j,l}Z_{j,l}+A_{j,0},\ P_j\Big(\partial_n+a_j\partial_1+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_{j,l}Z_{j,l}\Big)\Big].$$

注意到 $\mathscr{M}_j$ 对交换子运算是闭合的，故需看$[Z_{1,l},\partial_1]$与$[Z_{j,l},\partial_n+a_j\partial_1]$ $(j=2,\cdots,N)$. 将 $Z_{1,l}$用(4.4.3)中各向量场代入，$Z_{j,l}(j=2,\cdots,N)$用(4.4.4)中各向量场代入，具体计算即知，除了

$$[x_1\partial_1,\partial_1]=-\partial_1,\quad [x_n(\partial_n+a_j\partial_1),\partial_n+a_j\partial_1]=-\partial_n+a_j\partial_1$$

外，其余交换子均为零. 故可写成

$$[M,P]=QP+\sum_{j,l}B_{j,l}Z_{j,l}+B_0,$$

其中 $Q\in L^0(\Omega)$，$B_{j,l},B_0\in L^{m-1}(\Omega)$. 又注意到 $A_{j,l}$的主象征的支集在 $N^*_{\Sigma_j}$附近，所以 $B_{j,l}$的主象征的支集也在 $N^*_{\Sigma_j}$附近. 故又可写

$$[M,P]=QP+\sum_{p}B_pM_p+B_0, \tag{4.4.21}$$

其中 $M_p\in\mathscr{M}$. 用数学归纳法即可证得(4.4.19)成立. 至于引理中的(4.4.20)是(4.4.18),(4.4.19)的简单推论，这里我们略去其证明.

有了以上准备下面我们可回头证明本节的主要结果. 与定理4.3.1的证明类似，定理4.4.1可由以下两命题简单推出.

命题 4.4.13 若 $u\in H^{t,p,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$，$t>M+n/2$，且 $u\in H^{t,p+1,q}(\Omega_-;\mathscr{M},\mathscr{M}')$ (或 $u\in H^{t,p,q+1}(\Omega_-;\mathscr{M},\mathscr{M}')$)，那么 $u\in H^{t,p+1,q}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$ (或 $u\in H^{t,p,q+1}(\Omega;\mathscr{M},\mathscr{M}')$).

证 由(4.4.20)我们有

$$PZ^JM^Iu = Z^JM^IPu + [P, Z^JM^I]u$$
$$= Z^JM^IF(x, u, \cdots, \partial^\beta u, \cdots)$$
$$- \left(\sum Q_{J'', I''}Z^{J''}M^{I''}P + \sum C_{J', I'}Z^{J'}M^{I'}\right)u.$$

取 $|I| = p+1$, $|J| = q$, 注意 $H^{t-1, p+1, q}(\Omega_-; \mathscr{M}, \mathscr{M}') \supset H^{t, p, q}(\Omega_-; \mathscr{M}, \mathscr{M}')$, 由引理 4.4.11 有

$$Z^JM^IF(x, u, \cdots, \partial^\beta u, \cdots)$$
$$= \sum_{|\beta| \leqslant m-1}\left(\sum_{|J'| \leqslant q,\ |I'| \leqslant p+1} T_{B_{\beta, J', I'}} Z^{J'}M^{I'}\partial^\beta u\right) + R,$$

其中 $T_{B_{\beta, J', I'}} \in \mathrm{Op}(\Sigma^0_{t-m-n/2})$, $R \in H^{2(t-m)-n/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 将 Z^JM^I 与 ∂^β 交换, 并将 ∂^β 与 $T_{B_{\beta, J', I'}}$ 合在一起, 整理后即得

$$Z^JM^IF(x, u, \cdots, \partial^\beta u, \cdots) = \sum_{|\bar{J}| \leqslant q,\ |\bar{I}| \leqslant p+1} T_{B_{\bar{J}, \bar{I}}} Z^{\bar{J}} Z^{\bar{I}} u + \tilde{R},$$

其中 $T_{B_{\bar{J}, \bar{I}}} \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m-1}_{t-m-n/2})$, $\tilde{R} \in H^{2(t-m)-n/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 注意到

$$\sum Q_{J'', I''}Z^{J''}M^{I''}Pu = \sum Q_{J'', I''}Z^{J''}M^{I''}F(x, \cdots, \partial^\beta u, \cdots)$$
$$\in H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

并令 $U = (v_1, \cdots, v_j, \cdots)$, 其中 $v_1, \cdots, v_j, \cdots$ 分别表示 $u, \cdots, Z^{\bar{J}}M^{\bar{I}}u, \cdots$ ($|\bar{J}| \leqslant q$, $|\bar{I}| \leqslant p+1$), 对 U 我们有如下方程组

$$PU + BU = G, \tag{4.4.22}$$

其中 B 是一个以 $\mathrm{Op}(\Sigma^{m-1}_{t-m-n/2})$ 类仿微分算子为元素的矩阵, G 是属于 $H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的列向量, U 属于 $H^{t-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 且在 Ω_- 中 $U \in H^t_{\mathrm{loc}}(\Omega_-)$. 由定理 4.2.2 知 $U \in H^t_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 故 $u \in H^{t, p+1, q}(\Omega; \mathscr{M}, \mathscr{M}')$. 当 $u \in H^{t, p, q+1}(\Omega_-; \mathscr{M}, \mathscr{M}')$ 时, 只需取 J, I 使 $|J| \leqslant q+1$, $|I| \leqslant p$ 即可同理证得 $u \in H^{t, p, q+1}(\Omega_-; \mathscr{M}, \mathscr{M}')$.

命题 4.4.14 *设 $u \in H^{t, p, q}(\Omega; \mathscr{M}, \mathscr{M}')$, $t > n/2 + m$. 若 $p \leqslant t - m - n/2 + 1$, 且在 Σ_j^- 附近 $u \in H^{t+p+q}$, 则在 Σ_j^+ 附近也有 $u \in H^{t+p+q}$ ($j = 3, \cdots, N$); 若 $p > t - m - n/2 + 1$, 且在 Σ_j^- 附近 $u \in H^{t+q+\theta, p-\theta}(\Omega_-; \Sigma_j)$ (整数 $\theta \leqslant t - m - n/2 + 1$), 则在 Σ_j^+ 附近也有 $u \in H^{t+q+\theta, p-\theta}(\Omega; \Sigma_j)$.*

证 在命题 4.4.13 的证明中取 $|J| = q$, $|I| = \theta'$, 这里

$$\theta' = \begin{cases} p - \theta, & \text{当 } p > t - m - \dfrac{n}{2} + 1, \\ 0, & \text{当 } p \leqslant t - m - \dfrac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

作与上一命题类似的讨论可得(4.4.22), 并从命题条件知

$$\begin{cases} U \in H^{t, p}(\Omega; \mathscr{M}), & \text{当 } p \leqslant t - m - \dfrac{n}{2} + 1, \\ U \in H^{t, \theta}(\Omega; \mathscr{M}), & \text{当 } p > t - m - \dfrac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

且在 Σ_j^- ($j = 3, \cdots, N$) 附近有

$$\begin{cases} U \in H^{t+p}(\Omega_-), & \text{当 } p \leqslant t - m - \dfrac{n}{2} + 1, \\ U \in H^{t+\theta}(\Omega_-), & \text{当 } p > t - m - \dfrac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

由定理 2.5.3 即知上式在 Σ_j^+ ($j = 3, \cdots, N$) 附近也成立. 由 U 的定义可推出, 在 Σ_j^+ ($j = 3, \cdots, N$) 附近有

$$\begin{cases} u \in H^{t+p+q}(\Omega), & \text{当 } p \leqslant t - m - \dfrac{n}{2} + 1, \\ U \in H^{t+q+\theta, p-\theta}(\Omega, \Sigma_j), & \text{当 } p > t - m - \dfrac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

命题得证.

由命题 4.4.13 与命题 4.4.14 就可证明定理 4.4.1. 因其证明与定理 4.3.1 的证明基本一样故这里略去, 有兴趣的读者可仿照定理 4.3.1 的证明自行补上.

4.5 余法奇性的反射

我们将在本节中讨论的余法奇性的反射是指在考虑一带边界的混合问题时, 若它的解在过去的某一特征曲面上载有余法奇性, 当这一特征曲面与边界面横截相交、并从截口通过若干特征曲面而反射时, 则解在以后时刻在这些反射特征曲面上仍载有余法奇性.

在本节中我们总假设 u 是问题

$$\begin{cases} P(x,\mathrm{D}_x)u = f(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u), & x_n > 0, \\ Bu\,|_{x_n=0} = 0, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

的有充分正则性的解. P 是一具有光滑系数的 m 阶线性微分算子，f 是 $x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u$ 的 C^3 函数，边界条件给在算子 P 的非特征曲面 $\{x_n=0\}$ 上，边界算子 B 则假设满足一致的 Lopatinski 条件(这里的 Lopatinski 条件及下面的定理 4.5.1 分别是线性微分算子混合问题讨论中最基本的条件与结果，由于篇幅原因，本书认为读者已知这一内容而不加解释与证明，有兴趣作具体研究的读者可参阅 J. Chazarain 与 A. Piriou 的专著[Ch-P]).

对(4.5.1)的讨论与第 2,3 节的讨论相比较它多了一个实质性的困难，即对(4.5.1)的讨论不是在开集上进行的，通常的拟微分算子与仿微分算子的工具在这里是不能用的，取而代之的就是所谓切向拟微分算子与切向仿微分算子，这无疑增加了许多技术上的困难.

我们记 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的开集，$\Omega^+=\Omega\cap\{x_n\geqslant 0\}$，$\partial\Omega=\Omega\cap\{x_n=0\}$. 设 $v\in H^{s-1}(\Omega^+)$ 且满足

$$\begin{cases} Pv \in H^{s-m+1}(\Omega^+), \\ Bv \in H^s(\partial\Omega), \\ v = 0, \quad \text{当 } t<-\varepsilon. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

这里 ε 是充分小的正数. $B=(B_1,\cdots,B_\mu)$，其中 B_j 是 m_j 阶算子，$Bv\in H^s(\partial\Omega)$ 意味着 $B_jv\in H^{s-m_j}(\partial\Omega)$ $(j=1,\cdots,\mu)$ (μ 由 Lopatinski 条件所确定).

定理 4.5.1 *存在一 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的适当的开集 Ω，使得在 $\Omega^+=\Omega\cap\{x_n\geqslant 0\}$ 上可由 $v\in H^{s-1}(\Omega^+)$ 且满足(4.5.2)推出*

$$v \in H^s(\Omega^+), \quad \gamma v \in H^s(\partial\Omega).$$

这里 γv 表示函数 v 及其相对于超平面 $\{x_n=0\}$ 的法向导数的一列迹 $\gamma_j v=(\partial_{x_n})^j v|_{x_n=0}$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$. 与 Bv 类似，$\gamma v\in H^s(\partial\Omega)$ 意味着 $\gamma_j v\in H^{s-j}$ $(j=0,\cdots,m-1)$.

进一步，存在常数 C 及充分大的 λ，使

$$\lambda\|v\|^2_{s,\lambda}+\|\gamma v\|^2_{s,\lambda}\leqslant C\left\{\frac{1}{\lambda}\|Pv\|^2_{s-m+1,\lambda}+\|Bv\|^2_{s,\lambda}\right\}, \tag{4.5.3}$$

其中 $\|\ \|_{s,\lambda}$ 表示带权的 Sobolev 空间的模：

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s}\lambda^{s-|\alpha|}\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\partial^\alpha\cdot\|_{L^2(\Omega^+)}, \tag{4.5.4}$$

将定理 4.5.1 应用到半线性偏微分方程的混合问题(4.5.1)时，一个困难是当 $u\in H^{s-1}$ 时(4.5.1)的右端 $f(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u)$ 一般不属于 H^{s-m+1}. 一个克服的办法是把定理 4.5.1 推广到 $P+P_1$ 的情形，这里 P_1 是 $m-1$ 阶的切向仿微分算子. 但这一推广需要较大篇幅的讨论. 为避免冗长的证明，在本节我们将只详细讨论 $m=2$，$f=f(x,u)$ 的特殊情形，对更一般的情况我们将具体指出其困难及证明思路.

我们设 u 是问题

$$\begin{cases} P(x,\mathrm{D}_x)u=f(x,u), & \text{在 } x_n>0, \\ Bu\,|_{x_n=0}=0 \end{cases} \tag{4.5.5}$$

的属于 $H^s(\Omega^+)$ $(s>n/2)$ 的解，P 是二阶具光滑系数的线性微分算子，且相对于超曲面 $t=\text{const.}$ (t 是某时间变量)是严格双曲的. 同样设 $\{x_n=0\}$ 对算子 P 是非特征的，B 满足一致的 Lopatinski 条件.

又设 Σ_- 是算子 P 的特征超曲面，它与边界 $\partial\Omega$ 横截相交于余维数为 2 的子流形 Γ 上，Γ 穿过原点. 再设从 Γ 出发有另一特征曲面 Σ_+. 由引理 4.3.2 知可选取一坐标系，使边界 $\partial\Omega$ 仍在 $\{x_n=0\}$ 中，但 $\Sigma_+=\{x_1=x_n\}$，$\Sigma_-=\{x_1=-x_n\}$.

我们记 $\Sigma=\Sigma_+\cup\Sigma_-\cup\Sigma_0$ $(\Sigma_0=\{x_n=0\})$，并记 $\mathscr{M}$ 是切于 Σ 的向量场，那么由引理 4.3.3 知 $\mathscr{M}$ 的生成元可取为

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= x_n(x_1+x_n)(\partial_1+\partial_n), \\ M_j &= \partial_j \quad (j=2,\cdots,n-1), \\ M_n &= x_n(x_1-x_n)(\partial_1-\partial_n), \\ M_{n+1} &= x_1\partial_1+x_n\partial_n. \end{aligned}\right\} \tag{4.5.6}$$

我们定义

$$H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M}) = \{u \in H^s_{loc}(\Omega^+),\ M^I u \in H^s_{loc}(\Omega^+),\ M \in \mathscr{M},\ |I| \leqslant k\}. \tag{4.5.7}$$

对 $H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$ 显然有(类似于引理 4.3.4)

引理 4.5.2 若 $s>n/2$，$k\geqslant 0$，则 $H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$ 是一个代数. 又若 $f(x,u_1,\cdots,u_N)$ 对变元 $x,u_1,\cdots,u_N$ 为 C^∞ 函数，$u_j(x)\in H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$ $(j=1,\cdots,N)$，则 $f(x,u_1,\cdots,u_N)\in H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$.

引理 4.5.3 算子 $P(x,D_x)$ 可写成

$$P(x,D_x) = Q(x)K + \sum_{j=1}^{n+1} A_j(x,D_x)M_j + A_0(x,D_x), \tag{4.5.8}$$

其中 $K=(\partial_n^2-\partial_1^2)$，$A_j(x,D_x)$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$ 是一阶微分算子，$Q(x)\in C^\infty$ 且在原点附近不为零.

证 设 $p(x,\xi_1,\xi_n)$ 是 ξ_1 与 ξ_n 的二次齐次多项式，它在 $N^*_{\Sigma_+}$ 与 $N^*_{\Sigma_-}$ 上均为零，那么将 $p(x,\xi_1,\xi_n)$ 写成

$$p(x,\xi_1,\xi_n) = p_1(x)(\xi_1+\xi_n)^2 + p_2(x)(\xi_1-\xi_n)^2 + p_3(x)(\xi_1^2-\xi_n^2),$$

即知 $p_1(x)=(x_1+x_n)\bar{p}_1(x)$，$p_2(x)=(x_1-x_n)\bar{p}_2(x)$，又注意

$$(x_1\pm x_n)(\xi_1\pm\xi_n)^2 = 2(x_1\xi_1+x_n\xi_n)(\xi_1\pm\xi_n) + (x_1\mp x_n)(\xi_n^2-\xi_1^2),$$

故可得

$$p(x,\xi_1,\xi_n) = q(x)(\xi_n^2-\xi_1^2) + r(x,\xi_1,\xi_n)(x_1\xi_1+x_n\xi_n). \tag{4.5.9}$$

类似于引理 4.3.6 的证明，由(4.5.9)易知(4.5.8)成立.

通过具体计算我们有

$$\left.\begin{aligned}
&[K,M_1] = 2(x_1+x_n)K + 2(\partial_n+\partial_1)M_{n+1} + 2(\partial_1+\partial_n),\\
&[K,M_n] = 2(x_1-x_n)K + 2(\partial_n-\partial_1)M_{n+1} + 2(\partial_1-\partial_n),\\
&[K,M_{n+1}] = 2K,\\
&[K,M_j] = 0 \quad (j=2,\cdots,n-1).
\end{aligned}\right\} \tag{4.5.10}$$

由(4.5.10)及引理 4.5.3 我们易证

引理 4.5.4 对 $M\in\mathscr{M}$ 和 $P=P(x,D_x)$，我们有

$$[M^I,P] = \sum_{|I'|<|I|} Q_{I'}M^{I'}P + \sum_{|I'|\leqslant|I|} B_{I'}M^{I'}, \tag{4.5.11}$$

其中 $Q_{I'}$ 为零阶微分算子(即 C^∞ 函数)，$B_{I'}$ 为一阶微分算子.

证 由引理 4.5.3 及(4.5.10)式即知 $[M,P]$ 的主部可用 K 及 $\mathscr{M}$ 的元素表出，又注意

$$K = \frac{1}{Q(x)}\Big(P - \sum_{j=1}^{n+1} A_jM_j + A_0\Big) \tag{4.5.12}$$

(当 Ω 充分小时 $Q(x)\neq 0$)，可证得(4.5.11)对 $|I|=1$ 成立. 再用数学归纳法即可证得(4.5.11).

在给出本节主要结果前，我们来讨论定义在边界 $\partial\Omega$ 上的余法分布空间. 设 $\mathscr{M}_0$ 是定义在 $\{x_n=0\}$ 上且切于 Γ 的向量场，显然 $\mathscr{M}_0$ 的生成元为

$$x_1\partial_1,\ \partial_2,\ \cdots,\ \partial_{n-1}. \tag{4.5.13}$$

并且 $\mathscr{M}|_{x_n=0}=\mathscr{M}_0$. 我们定义

$$H^{s,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0) = \{v \in H^s_{loc}(\partial\Omega),\ Z^I v \in H^s_{loc}(\partial\Omega),\ Z \in \mathscr{M}_0,\ |I| \leqslant k\}. \tag{4.5.14}$$

显然我们有

引理 4.5.5 若 $s>(n-1)/2$，$k\geqslant 0$，则 $H^{s,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)$ 是一个代数. 又若 $f(x',v_1,\cdots,v_N)$ 对变元 $x,v_1,\cdots,v_N$ 为 C^∞ 函数，$v_j(x')\in H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$ $(j=1,\cdots,N)$，则 $f(x',u_1,\cdots,u_N)\in H^{s,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)$，其中 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$.

有了以上准备，我们可以证明：

定理 4.5.6 若 $u\in H^s_{loc}(\Omega^+)$ $(s>n/2)$ 为(4.5.5)的解，且 $u(x)\in H^{s,k}(\Omega^+\cap\{x_1<0\};\mathscr{M})$，那么 $u\in H^{s,k}(\Omega^+;\mathscr{M})$，并且 $\gamma u\in H^{s,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)$.

证 对 k 进行归纳. 当 $k=0$ 时，$Pu=f(x,u)\in H^s_{loc}(\Omega^+)$，$Bu=0$. 用 φu 在定理 4.5.1 中代替 v (这里 $\varphi\in C^\infty$，且 $x_1>-\varepsilon/2$ 时为 1，$x_1<-\varepsilon$ 时为 0)，则 $\varphi u\in H^{s,0}(\Omega^+;\mathscr{M})=H^s_{loc}(\Omega^+)$ 是显然

的. 为证 $\gamma(\varphi u)\in H^s_{loc}(\partial\Omega)$ 我们看 $P(\varphi u)=\varphi f(x,u)+[P,\varphi]u$, 因为 $[P,\varphi]$ 是一阶算子, 故 $P(\varphi u)\in H^{s-1}_{loc}(\Omega^+)$. 再看 $B(\varphi u)|_{x_n=0}=[B,\varphi]u|_{x_n=0}$, 注意 $B=(B_1,\cdots,B_\mu)$, 故只需考虑 $B_j(\varphi u)|_{x_n=0}=[B_j,\varphi]u|_{x_n=0}$. 而 $[B_j,\varphi]$ 为 m_j-1 阶算子, 故

$$[B_j,\varphi]u|_{x_n=0}\in H^{s-m_j+1-1/2}_{loc}(\partial\Omega)\subset H^{s-m_j}_{loc}(\partial\Omega),$$

即 $B_j(\varphi u)|_{x_n=0}\in H^{s-m_j}_{loc}(\partial\Omega)$, 亦即 $B(\varphi u)|_{x_n=0}\in H^s_{loc}(\partial\Omega)$. 由定理 4.5.1 知 $\gamma(\varphi u)\in H^s_{loc}(\partial\Omega)$.

现在设定理对于 $k-1$ 成立, 即

$$\varphi u\in H^{s,k-1}(\Omega^+;\mathscr{M}),\quad \gamma(\varphi u)\in H^{s,k-1}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0), \tag{4.5.15}_{k-1}$$

可证 $(4.5.15)_k$ 亦成立. 取 $M\in\mathscr{M}$, 用 $M^I(|I|\leqslant k)$ 作用于 $P(\varphi u)$, 由引理 4.5.4 有

$$PM^I(\varphi u)=M^IP(\varphi u)+\sum_{|I''|<|I|}Q_{I''}M^{I''}P(\varphi u)+\sum_{|I'|\leqslant|I|}B_{I'}M^{I'}(\varphi u).$$

令 $U={}^t(v_1,\cdots,v_j,\cdots)$, 其中 $v_j=M^{I_j}(\varphi u)$ $(|I_j|\leqslant k)$, 则有

$$PU+AU=R, \tag{4.5.16}$$

其中 A 是以一阶算子为元素的矩阵,

$$\begin{aligned}R&=R_1+R_2+R_3\\&=M^IP(\varphi u)+\sum_{|I''|<|I|}Q_{I''}M^{I''}P(\varphi u)+\sum_{|I'|\leqslant|I|-1}B_{I'}M^{I'}(\varphi u).\end{aligned}$$

注意 $u\in H^{s,k}(\Omega^+\cap\{x_1<0\},\mathscr{M})$, 故由 $\varphi u\in H^{s,k-1}(\Omega^+;\mathscr{M})$ 知 $u\in H^{s,k-1}(\Omega^+;\mathscr{M})$. 所以

$$R_1=M^I(\varphi f(x,u)+[P,\varphi]u)\in H^{s-1}_{loc}(\Omega^+).$$

同理知 $R_2\in H^{s-1}_{loc}(\Omega^+)$, 而 $R_3\in H^{s-1}_{loc}(\Omega^+)$ 是显然的. 故

$$PU+AU=R\in H^{s-1}_{loc}(\Omega^+). \tag{4.5.16$'$}$$

注意 $\mathscr{M}|_{x_n=0}=\mathscr{M}_0$, 若 $M\in\mathscr{M}$, 则 $Z=M|_{x_n=0}\in\mathscr{M}_0$. 对任一连续函数 $g(x',x_n)$ 记 $g_0(x')=g(x',0)$, 那么

$$\begin{aligned}BU|_{x_n=0}&=B(Z^I(\varphi_0u_0))\\&=[B,Z^I](\varphi_0u_0)+Z^I([B,\varphi_0]u_0).\end{aligned}$$

同上由 $u\in H^{s,k}(\Omega^+\cap\{x_1<0\};\mathscr{M})$ 及 $\gamma(\varphi u)\in H^{s,k-1}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)\subset H^{s-1,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)$ 知 $\gamma u\in H^{s-1,k}(\partial\Omega;\mathscr{M}_0)$. 所以 $Z^I([B,\varphi_0]u_0)\in H^{s-1}_{loc}(\partial\Omega)$. 简单计算知 $[B,Z^I](\varphi_0u_0)\in H^{s-1}_{loc}(\partial\Omega)$. 故

$$BU|_{x_n=0}\in H^{s-1}_{loc}(\partial\Omega). \tag{4.5.17}$$

对 (4.5.16)$'$, (4.5.17) 用定理 4.5.1, 知 $U\in H^s_{loc}(\Omega^+)$, $\gamma U\in H^s_{loc}(\partial\Omega)$, 即 $(4.5.15)_k$ 成立. 定理证毕.

最后我们对更一般情形给出几点附注.

1) 若算子 P 是 m 阶算子 $(m>2)$, 且 $f=f(x,u,\cdots,\nabla^{m-2}u)$, 并设 $\Sigma_-\cap\partial\Omega=\Gamma$ 上仅有一个反射特征曲面, 这时结论与定理 4.5.6 相同, 而困难在于相应于 (4.5.8) 式中 K 的系数是一微分算子 (而不是一个函数), 且仅在某微局部方向是椭圆的. 为使 K 有类似于 (4.5.12) 的表示, 必须作微局部的分解. 但这时的困难在于所讨论的问题是在半空间中 (与 4.3 节不同), 为避免一般的微局部分解, 需引进切向拟微分算子并进行较复杂的切向微局部分解. 这一工作可见 M. Beals 和 G. Métivier 的[B-M1].

2) 若算子还是 m 阶算子 $(m>2)$, 且 $f=f(x,u,\cdots,\nabla^{m-2}u)$, 但从 Γ 上有多个反射特征面, 这时用通常向量场已不能较好描述余法分布空间 (类似于奇性相互作用后截口处通过多个特征曲面的情形——即 4.3 节所讨论的), 但在半空间上引进拟微分算子又有新困难. M. Beals 和 G. Métivier (见[B-M2]) 在处理这一问题时有两个基本办法: 其一是按 4.3 节将余法分布空间在开集上定义成若干可用向量场定义的余法分布空间的和, 然后再限制到半空间中, 这就使在具体运作时带来很大方便; 其二, 相应于余法空间的分解, 算子的分解借助于一套相当技巧性的切向拟微分算子来完成.

3) 在 1) 或者 2) 的基础上, 设 $f=f(x,u,\cdots,\nabla^{m-1}u)$. 这时非线性项已不能简单放到方程右边处理, 而需借助于线性化技巧将其放到方程的左边讨论. 当然这时多出的一个 $m-1$ 阶算子 P_{m-1} 是具有非光滑系数的. 在讨论非光滑系数微分算子的性质与相应能量估

计后，可在 1),2)基础上加以改进而证得奇性反射的结论. 最后这一工作是沈禾名在文[Sh]中完成的.

4.6 关于余法奇性的其他结果

在余法分布框架下对非线性偏微分方程解的奇性进行研究是一个近十年来相当热门的研究课题，而且尚有大量未解决的问题. 作为本章的结束，我们简短介绍几个由于篇幅原因本书没有展开具体讨论，但十分重要的研究课题.

4.6.1 拟线性方程(组)的余法奇性解

拟线性与半线性偏微分方程的本质区别之一是拟线性方程的特征面依赖于解 u，故一般而言不再是光滑的. 当特征曲面 Σ_j 不是光滑超曲面时，与之对应的余法分布空间是借助于一族 $C^\sigma(\sigma>1)$的向量场 $\mathscr{Z}=(Z_1,\cdots,Z_p)$来定义的.

Alinhac [Ali1,2]和 Chemin [Chem1]引进和研究了上述类型的余法分布空间，并用这种类型的余法分布空间讨论了拟线性微分方程解的奇性的传播与相互作用.

首先他们导出一个仿微分算子 $\widetilde{Z}_j$，它以 Z_j 为象征(对选定的 L-P 分解)，并定义空间

$$H^{s,k}(\mathscr{Z}) = \{u \in H^s_{loc},\ \widetilde{Z}_{j_1}\cdots\widetilde{Z}_{j_l}u \in H^s_{loc},\ l\leqslant k,\ \widetilde{Z}_{j_l} \in \mathscr{Z}\} \tag{4.6.1}$$

与之相对应他们还定义 $C^{\alpha,k}(\mathscr{Z})$ (即相对于 Hölder 空间的余法分布空间). 但这些空间的定义一般而言是没有意义的(除非 k 很小)因为它依赖于仿乘积定义中可任意选择的东西. 但这里有这样一个原则，即

当 Z_j 的系数属于 $C^{\sigma,k-1}$时，空间 $H^{s,k}(\mathscr{Z})$不依赖于上述任意选择的东西，且对 $s>n/2$ 时构成一个代数.

由这一原则，我们"递推地"得到 Z_j 系数的正则性(实际上是依赖于特征面的正则性)，并相应可对更大的 k，使 $H^{s,k}(\mathscr{Z})$的定义是

合理的.

当涉及的特征面个数较小时(例如一或者两个特征面)，还可采用另外的办法讨论拟线性方程组的奇性. 实际上 Alinhac 在[Ali1]中是采用仿复合的办法(这里实际上是"仿坐标变换")把特征面"拉直"后来讨论拟线性方程解的奇性传播的. 而王维克在[Wa1]中对两个特征面的情形，先把特征面"拉直"而把坐标变换函数放进方程作参函数，然后递推地交替对解与特征曲面得到方程解的奇性在边界上的反射以及特征曲面的正则性. 当然因这时问题讨论是在带边界区域上进行的，切向的仿微分算子在余法分布空间上的性质的讨论是一个十分重要和棘手的问题.

4.6.2 含强间断的奇性解

本章考虑方程的解均至少要求 $u\in H^{s+l}_{loc}(\Omega)$，$s>n/2$ (l 与非线性项中出现的导数的阶数有关)，而这一要求是为使方程中出现的非线性项能保持一定的正则性. 这就是通常所说的弱奇性解. 但很多情形下我们还需考虑解的强间断，特别是解的值在某一特征面的两侧出现跳跃的情况. 这时为使非线性函数有意义，总将所考虑的函数空间置于空间 L^∞之中.

这方面工作我们首先要提到 G. Métivier 的工作[Met1,2]. 他在空间 $L^\infty\cap H^{0,k}_\Sigma(k>(n+5)/2)$中对半线性方程组讨论了余法波的传播，相互作用及反射. 他用的方法主要是给出了相应于 $L^\infty\cap H^{0,k}_\Sigma$空间的模的能量估计，用迭代法证明解的存在性，并同时得出解的正则性(或者说奇异性). 在 G. Métivier 工作基础上，最近文[S-W]结合本章 4.3 节的方法讨论了强奇性与弱奇性解的相互作用.

关于这类分片正则解的工作还可见陈恕行的[Chen1]，J. Rauch 与 M. Reed 的[R-R2].

另外，陈恕行在文[Chen2]中讨论了半线性波方程的 Riemann 问题，其初始值在平面(x,y)上的被坐标轴分成的 4 个区域上取不同的常数值(更确切地说 $u(0,x,y)=0$，$(\partial_t u)(0,x,y)=\varphi(x,y)$，$\varphi(x,y)$在上述 4 个区域上分别取不同值). 文献[Chen2]证明了半

线性偏微分方程

$$\Box u = f(t,x,y,u) \tag{4.6.2}$$

在上述初值下的解除了在过$\{x=0\}$，$\{y=0\}$的特征面上有奇性外，从原点出发的前向光锥上也出现奇性．这一问题与后面我们将讨论的三个波的相互作用一样(见第 7 章)，与前几节讨论的问题想比较有本质的困难．以上问题若放在拟线性方程上则是更复杂的问题，这里涉及激波，接触间断等强间断，这是值得另写一本书的大题目，故这里不一一提及这方面的工作．

4.6.3 其他情况

本章前几节所考虑的特征面都是横截相交的，当特征面是相切相交，甚至在交口处出现尖点或燕尾奇性时，相应的方程解的余法奇性的传播问题就复杂多了(这时方程仍要求是严格双曲的)．R. Melrose 和 A. Sà Barreto 在[Mel2]，[SB1]中讨论当特征面上出现尖点及燕尾奇性时，解的奇性沿特征面继续传播的情形．仇庆久和尹会成在文[Y-Q1,2]中讨论了二阶非线性方程，证明了当其两个特征面是相切相交时解的奇性沿特征面传播的结论．

J. Rauch 和 M. Reed (见[R-R2])在空间维数为 1 时讨论了半线性方程解的奇性，并给出很完整的回答．这些结果后被 J. M. Chemin (见[Chem1])推广到一般非线性的情形．他们证明了若给定一个函数$\rho(x)$使u的初始值在x的邻域内属于$H^{\rho(x)}$，则可以确定(由特征上解的传播及一系列的相互作用)一个函数$\sigma(t,x)$使解u在(t,x)邻域内属于$H^{\sigma(t,x)}$．

至于三个波相互作用以及与其相关的工作我们将在第 7 章作为二次微局部化的应用来讨论．

余法分布的奇性分析是一个相当丰富的研究领域，仅介绍以上工作难免会遗漏一些很有意义的研究．例如 R. Melrose 与 N. Ritter 提出一套与本章所述不尽相同的余法分布空间(见[M-R1,2])．又例如 A. Piriou (见[Pi])提出的一套相对余法奇性的象征计算，等等．有兴趣的读者可以参看相应的文献．

第 5 章　非齐性空间上的拟微分算子

在一、二两章中我们介绍了经典的拟微分算子和仿微分算子，这是微局部分析理论的基础知识．在那里，我们所研究的是椭圆型算子或者双曲型算子的较简单的问题，因此所研究的空间是各向同性的．但是当我们要研究退化椭圆型算子，或者是非线性双曲型算子的较复杂的奇异性的传播问题时，所研究的空间在不同的方向显示出不同的特性．因此，空间是各向异性的和非齐性的，这时进行更加精细的微局部的分析就显得更加重要和自然了．因而就有了所谓的二次微局部分析和高次微局部分析理论，以及非齐性象征的 Weyl 运算理论．事实上，幂零 Lie 群上的微分算子理论(见[R-S])，以及前面第 4 章介绍的余法分布空间就是非齐性分析的具体实例．从本章开始，我们系统地介绍这一抽象理论及其应用．这些都是微局部分析理论在 20 世纪 80 年代末和 90 年代初的最新进展．

本章和下一章用到一些辛几何的知识，读者可以在[Q-X]第八章和[Hö2]第三卷第十八、第二十一章中找到详尽的说明．

5.1　几何结构

我们现在研究$\mathbf{R}^n$上的广义拟微分算子，为此我们分析一下经典的拟微分算子的象征的构造．称一个函数$a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$，其中$0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1$，若$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$，$\exists C_{\alpha,\beta} > 0$，使得我们有下面的估计：

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{5.1.1}$$

对于所有的$(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$成立．我们现在在$\mathbf{R}^{2n}$上引入一个度量：

$$(1+|\xi|^2)^\delta \, dx^2 + (1+|\xi|^2)^{-\rho} d\xi^2 = g^{\rho,\delta}_{(x,\xi)}(dx, d\xi), \tag{5.1.2}$$

则(5.1.1)表示任给整数 k，存在常数 C_k，使得 $\forall X_1,\cdots,X_k,X\in\mathbf{R}^{2n}$，有下面的估计式：

$$|\langle a^{(k)}(X),X_1\otimes\cdots\otimes X_k\rangle|\leqslant C_k(1+|\xi|)^m\prod_{j=1}^k g_X^{\rho,\delta}(X_j)^{1/2},\tag{5.1.3}$$

这里$\langle a^{(k)}(X),X_1\otimes\cdots\otimes X_k\rangle$表示 $a(X)$的 k 阶导数与 $X_1,\cdots,X_k$ 的张量积，即 $a(X)$关于这些向量的方向导数. $g_X^{\rho,\delta}(X_j)^{1/2}$ 表示向量 X_j 在度量 $g_X^{\rho,\delta}$ 下的长度.

现在我们推广这一概念，给出下面的定义：

定义 5.1.1 称 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个正定二次形式 $g_X(Y)$ 为缓变的，若存在常数 C_0 使得 $\forall X,Y,T\in\mathbf{R}^{2n}$ 有

$$g_X(Y)\leqslant C_0^{-1}\Rightarrow g_{X+Y}(T)\leqslant C_0 g_X(T).\tag{5.1.4}$$

作为一个练习，大家可以立即证明当 $0\leqslant\rho,\delta\leqslant 1$ 时，$g_X^{\rho,\delta}$ 是一个缓变的度量. 现在假设 G 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个常系数的正定二次形式(以下这种度量称为常值度量)，在 $x\in\mathbf{R}^{2n}$ 的某一个邻域内，若 $u\in C^k$，定义 u 的 k 阶微分在度量 G 下的范数为

$$|u|_k^G(x)=\sup_{T_j\in\mathbf{R}^{2n}}\frac{|\langle u^{(k)}(x),\ T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|}{\prod_{j=1}^k G(T_j)^{1/2}}.\tag{5.1.5}$$

下面给出相应的象征类的定义：

定义 5.1.2 设 g 为 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个缓变度量，m 为 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个正的实值函数. 称 m 为一个权函数，若存在 C_0 使得

$$g_X(X-Y)\leqslant C_0^{-1}\Rightarrow C_0^{-1}\leqslant\frac{m(X)}{m(Y)}\leqslant C_0.\tag{5.1.6}$$

称一个函数 $a\in S(m,g)$，若 $a\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$，以及 $\forall k\in\mathbf{N}$，$\exists C_k>0$ 使得对于所有的 $X,T_1,\cdots,T_k\in\mathbf{R}^{2n}$ 有下面的估计式：

$$|\langle a^{(k)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|\leqslant C_k m(X)\prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}.\tag{5.1.7}$$

这里 g_X 是以 X 为参数的常值度量.

由定义立即可知 $S(m,g)$是一个 Fréchet 空间，其半范由适合(5.1.7)的最小的 C_k 给出. 现在若 g 是由(5.1.2)给出的度量，$m=(1+|\xi|^2)^{\mu/2}$，则有 $S(m,g)=S^{\mu}_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^{2n})$.

因为当 X 在 $\mathbf{R}^{2n}$的一个紧集内变化时，g_X 和 $m(X)$都是上下有界的. 所以 $C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})\subset S(m,g)$. 现在给出 $\mathbf{R}^{2n}$的一个从属于度量 g 的单位分解.

引理 5.1.3 1) 假设 $0<\varepsilon<C_0$，则能选取 $X_\nu\in\mathbf{R}^{2n}$使得当 $R\geqslant\varepsilon$ 时下面的 g-球族：

$$U_{X_\nu,R}=\{X\in\mathbf{R}^{2n};\ g_{X_\nu}(X_\nu-X)<R\}\tag{5.1.8}$$

覆盖 $\mathbf{R}^{2n}$，以及当 $R\leqslant C_0$ 时交集非空的上述的球的个数有一个固定的上界.

2) 存在 $S(1,g)$的一个有界族$\{\varphi_\nu\}$满足：$\varphi_\nu\in C_0^\infty(U_{X_\nu,R})$及

$$\sum_\nu\varphi_\nu=1.\tag{5.1.9}$$

证 选取一个最大可能的序列 $X_\nu\in\mathbf{R}^{2n}$满足条件

$$g_{X_\nu}(X_\nu-X_\mu)\geqslant\varepsilon,\quad \nu>\mu.\tag{5.1.10}$$

为此仅需先在一个固定的紧集内选取最大的序列，然后取一个上升的竭穷紧子集序列，一步一步地做下去就可以完成这样的选取.

另一方面，若当 $\nu>\mu$ 时 $g_{X_\nu}(X_\nu-X_\mu)\leqslant C_0$，则有

$$\varepsilon\leqslant g_{X_\mu}(X_\nu-X_\mu)\leqslant C_0 g_{X_\nu}(X_\nu-X_\mu),$$

因此也有

$$g_{X_\nu}(X_\nu-X_\mu)\geqslant\min\{C_0,\varepsilon/C_0\},\quad \nu>\mu.$$

下面估计当 $R\leqslant C_0$ 时有多少个形如 $g_{X_\nu}(X_\nu-X)<R$ 的球交集非空. 由 g_X 的缓变性有 $g_X(X_\nu-X)<C_0R$，如果 X_μ 在这个球中，则有

$$\varepsilon\leqslant g_{X_\mu}(X_\nu-X_\mu)\leqslant C_0 g_X(X_\nu-X_\mu).$$

因此 $g_X(X_\nu-X_\mu)\geqslant\varepsilon/C_0$，这就证明了满足 $g_X(X_\nu-X)<C_0R$ 的点 X_ν 的个数有一个固定的上界. 显然当 $R=\varepsilon$ 时由(5.1.8)给出的球覆盖全空间 $\mathbf{R}^{2n}$.

下面构造相应的单位分解. 取 $\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$满足条件：在$(-\infty,\varepsilon)$

上 $\psi=1$，在 $(R,+\infty)$ 上 $\psi=0$，其中 $\varepsilon<R<C_0$. 令 $\psi_\nu(X)=\psi(g_{X_\nu}(X-X_\nu))$，则 $\psi_\nu\in C_0^\infty(U_{X_\nu,R})$.

因为有

$$|\langle \psi_\nu^{(1)}(X),\ T\rangle| = |\psi'(g_{X_\nu}(X-X_\nu))\langle \mathrm{d}g_{X_\nu}(X-X_\nu),T\rangle|$$
$$\leqslant \frac{C}{R} g_{X_\nu}(X-X_\nu)^{1/2} g_{X_\nu}(T)^{1/2},$$

容易证明 $\{\psi_\nu\}$ 是 $S(1,g)$ 的一个有界子集，即有 $|\psi_\nu|_k^g(X)\leqslant C_{k,\varepsilon}$. 在 ψ_ν 的支集上 g 等价于 g_{X_ν}. 因为至多只有 N 个球相交非空，所以若令 $\Psi=\sum\psi_\nu$，则有

$$1\leqslant \Psi \leqslant N,\quad |\Psi|_k^g \leqslant NC_{k,\varepsilon}.$$

因此，令 $\varphi_\nu=\psi_\nu/\Psi$ 则有

$$\sum_\nu \varphi_\nu \equiv 1.$$

这就证明了引理.

利用这一单位分解可以将非光滑的度量以及权函数正则化，即可以给出一个等价的光滑度量和权函数. 设 m 为一个权函数，令

$$m_1(X) = \sum_\nu \varphi_\nu(X)m(X_\nu). \tag{5.1.11}$$

由于当 $\varphi_\nu(X)\neq 0$ 时，$g_{X_\nu}(X-X_\nu)<C_0$. 因此有

$$m(X_\nu)/C \leqslant m(X) \leqslant Cm(X_\nu),\quad X\in \operatorname{supp}\varphi_\nu.$$

这就证明了下面的估计式

$$m_1(X)/C \leqslant m(X) \leqslant Cm_1(X),\quad X\in \mathbf{R}^{2n}.$$

利用 $\{\varphi_\nu\}$ 在 $S(1,g)$ 中的有界性，还有

$$|m_1|_k^g \leqslant C_k'|m|_k^g.$$

这就证明了 $m_1\in S(m,g)=S(m_1,g)$. 类似地可以正则化度量函数 g. 下面研究象征空间 $S(m,g)$ 中的运算.

命题 5.1.4 *设 $p\in S(p,g)$，$a(t)^2\mathrm{d}t^2$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的一个缓变度量，则 $G=a(p)^2|\mathrm{d}p|^2+(1+p(a(p)))g$ 也是一个缓变的度量. 另外，设 m 是 $a^2\mathrm{d}t^2$ 的一个权函数，以及 $\chi\in S(m,a^2\mathrm{d}t^2)$，则 $m(p)$ 是 G 的一个权函数，以及 $\chi(p)\in S(m(p),G)$.*

注 令 $a(t)=1/(1+t)$，$m(t)=(1+t)^\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$\chi(t)=t^\alpha$. 则根据上面的命题有 $p^\alpha\in S(p^\alpha,g)$.

证 首先由于 $a(t)^2\mathrm{d}t^2$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上缓变，我们有

$$a(t)|s-t|<C_0 \Rightarrow C_0^{-1}\leqslant \frac{a(t)}{a(s)} \leqslant C_0. \tag{5.1.12}$$

此式成立的一个充分条件是

$$|a'(t)|\leqslant \overline{C}a(t)^2. \tag{5.1.13}$$

因为由此可以导出

$$|a(t)^{-1}-a(s)^{-1}|\leqslant \overline{C}|t-s|.$$

这就给出了(5.1.12)，其中 $\overline{C}=2$，$C_0=(2\overline{C})^{-1}$. m 是 $a(t)^2\mathrm{d}t^2$ 的一个权函数的充分条件是

$$|m'(t)|\leqslant \widetilde{C}m(t)a(t).$$

事实上有

$$\left|\frac{m(t)}{m(s)}-1\right| = \left|\frac{m(t)-m(s)}{m(s)}\right|$$
$$= \frac{|(m(t)-m(s))(t-s)a(s)|}{|(t-s)m(s)a(s)|}.$$

由于 $m(t)$ 的光滑性，当 $|t-s|$ 充分小时，$|m(t)-m(s)|\leqslant \overline{C}|m'(s)(t-s)|$，因此

$$\left|\frac{m(t)}{m(s)}-1\right|\leqslant C.$$

类似的关于 $m(s)/m(t)$ 的估计，就证明了 m 是 $a(t)^2\mathrm{d}t^2$ 的一个权函数. 由于 $\chi\in S(m,a^2\mathrm{d}t^2)$，我们有下面的估计：

$$|\chi^{(k)}(t)|\leqslant C_k m(t)a(t)^k.$$

现在证明 G 是一个缓变度量，以及 m 是 G 的权函数. 因此首先证明下面的关系式：

$$G_X(Y-X)<C_0^{-1} \Rightarrow C_0^{-1}\leqslant \frac{G_X(T)}{G_Y(T)} \leqslant C_0 \tag{5.1.14}$$

对于所有的 $T\in\mathbf{R}^{2n}$ 成立. 根据定义有

$$G_X(Y-X)=a(p(X))^2\langle Y-X,\mathrm{d}p(X)\rangle^2$$
$$+(1+p(X)a(p(X)))g_X(Y-X).$$

因为 $g\leqslant G$，所以立即有 g_Y/g_X 和 $p(Y)/p(X)$ 是有界的. 由于 $p\in S(p,g)$，利用 Taylor 展式，关于 $0<s<1$ 有

$$|\langle Y-X,\mathrm{d}p(X+s(Y-X))-\mathrm{d}p(X)\rangle| \leqslant Cp(X)g_X(Y-X).$$

因为 $G_X(Y-X)<C_0^{-1}$，这就证明了

$$a(p(X))|\langle Y-X,\mathrm{d}p(X+s(Y-X))\rangle|\leqslant C_0^{-1/2}+CC_0^{-1}.$$

再次利用 Taylor 公式，

$$a(p(X))|p(Y)-p(X)|\leqslant C_0^{-1/2}+CC_0^{-1}.$$

若 C_0 取的充分大，则由(5.1.12)，即由 a 的缓变性就可导出 $a(p(Y))/a(p(X))$ 是有界的. 同样，$m(p(Y))/m(p(X))$ 也是有界的. 另一方面，对于 $T\in\mathbf{R}^{2n}$，利用 Taylor 公式类似可以证明

$$\begin{aligned}a(p(X))^2|\langle T,\mathrm{d}p(X)-\mathrm{d}p(Y)\rangle|^2 &\leqslant Ca(p(X))^2p(X)^2g_X(Y-X)g_X(T)\\ &\leqslant C(1+a(p(X))p(X))g_X(T).\end{aligned}$$

这里用到了由 $G_X(Y-X)<C_0^{-1}$ 导出的 $a(p(X))p(X)g_X(Y-X)<C_0^{-1}$. 因此有

$$\begin{aligned}\frac{G_X(T)}{G_Y(T)}&=\frac{a(p(X))^2\langle T,\mathrm{d}p(X)\rangle^2+(1+p(X)a(p(X)))g_X(T)}{a(p(Y))^2\langle T,\mathrm{d}p(Y)\rangle^2+(1+p(Y)a(p(Y)))g_Y(T)}\\ &\leqslant C\frac{a(p(X))^2\langle T,\mathrm{d}p(X)-\mathrm{d}p(Y)\rangle^2+a(p(Y))^2\langle T,\mathrm{d}p(Y)\rangle^2}{a(p(Y))^2\langle T,\mathrm{d}p(Y)\rangle^2+(1+p(Y)a(p(Y)))g_Y(T)}\\ &\quad+\frac{(1+p(Y)a(p(Y)))g_Y(T)}{a(p(Y))^2\langle T,\mathrm{d}p(Y)\rangle^2+(1+p(Y)a(p(Y)))g_Y(T)}\\ &\leqslant\bar{C}.\end{aligned}$$

这就证明了 G 是缓变的以及 $m(p)$ 是 G 的一个权函数. 下面证明

$$\chi(p)\in S(m(p),G).$$

因为 $\chi(p)$ 的 k 阶导数是形如 $\chi^{(j)}(p)p^{(k_1)}\cdots p^{(k_j)}$ 的项的线性组合，其中 $k_l\geqslant1$，$\sum_{l=1}^{j}k_l=k$. 由于 $\chi\in S(m,a)$，我们有

$$|\chi^{(j)}(p)|\leqslant C_jm(p)a(p)^j.$$

因此，只需要证明下面的估计式：

$$|\langle a(p)p^{(i)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_i\rangle|\leqslant C_i\prod_{\nu=1}^{i}G_X(T_\nu)^{1/2}.$$

当 $i=1$ 时这是显然的，因为 G_X 的第一项就是如此. 当 $i>1$ 时，由于 $p\in S(p,g)$ 我们有

$$\begin{aligned}a(p)|\langle p^{(i)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_i\rangle| &\leqslant C_ia(p)p(X)\prod_{\nu=1}^{i}g_X(T_\nu)^{1/2}\\ &=C_ip(X)a(p(X))(1+p(a(p)))^{-i/2}\\ &\quad\cdot\prod_{\nu=1}^{i}(1+pa(p)g_X(T_\nu))^{1/2}\\ &\leqslant C_i\prod_{\nu=1}^{i}G_X(T_\nu)^{1/2}.\end{aligned}$$

这就证明了命题 5.1.4.

我们记 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的辛形式为

$$\sigma(X,Y)=\sigma((x,\xi),(y,\eta))=\langle\xi,y\rangle-\langle\eta,x\rangle. \tag{5.1.15}$$

我们现在定义 g_X 的 σ-共轭度量为

$$g_X^\sigma(T)=\sup_{W\neq0}\frac{\sigma(T,W)^2}{g_X(W)}, \tag{5.1.16}$$

定义步长函数 λ_g 为

$$\lambda_g(X)=\inf_{T\neq0}\left(\frac{g_X^\sigma(T)}{g_X(T)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.1.17}$$

我们总是假设 $\lambda_g(X)\geqslant1$，即

$$g_X\leqslant g_X^\sigma. \tag{5.1.18}$$

当 g 满足这一条件时，我们称 g 满足所谓“测不准原理”. 这时在球 $\{Y;\ g_X(Y-X)\leqslant r^2\}$ 上的局部化是允许的. 上面关于度量和权函数的要求都是局部的，但是定义拟微分算子时是要在全空间上积分的. 因此关于它们在无穷远处的增长性还要加以限制，为此给出下面的定义.

定义 5.1.5 *称一个度量 g 是缓增的，若它是缓变的以及存在常数 C_1,N_0，使得对于所有的 $X,Y,T\in\mathbf{R}^{2n}$ 有下面的估计式：*

$$g_Y(T) \leqslant C_1 g_X(T)(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0}. \qquad (5.1.19)$$

称 g 的一个权函数 m 是缓增的，若有

$$m(Y) \leqslant C_1 m(X)(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0}. \qquad (5.1.20)$$

由定义立即可以导出下列估计式：若 g 是缓增的，则有

$$g_X^\sigma(T) \leqslant C_1 g_Y^\sigma(T)(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0}, \qquad (5.1.21)$$

$$1+g_X^\sigma(X-Y) \leqslant C_1(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0+1}, \qquad (5.1.22)$$

$$\lambda_g(Y) \leqslant C_1 \lambda_g(X)(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0}, \qquad (5.1.23)$$

由(5.1.21)又可以证明若 m 是缓增的，则 $1/m$ 也是缓增的.

5.2 软禁估计(Confinement)

现在研究在前一节中引入的象征，以及由它们所定义的拟微分算子. 设 $a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_X^{2n})$，其中 $\mathbf{R}_X^{2n}=\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$. 则我们可以定义一个从 $\mathcal{S}(\mathbf{R}_x^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_x^n)$ 的线性算子 a^w，称为 a 的 Weyl 量子化：

$$(a^w u)(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi. \qquad (5.2.1)$$

这当然是在分布的意义下定义的，即：对于 $u,v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$，

$$\langle a^w u, v\rangle = (2\pi)^{-n}\iiint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.$$

所以 a^w 的 Schwartz 核为

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\mathrm{d}\xi, \qquad (5.2.2)$$

或者

$$K(x+t/2, x-t/2) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle t,\xi\rangle} a(x,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

再作 Fourier 逆变换就得到

$$a(x,\xi) = \int K(x+t/2, x-t/2)e^{-i\langle t,\xi\rangle}\mathrm{d}t. \qquad (5.2.3)$$

对于“好”的函数(例如 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 中的元)，我们定义下面的复合律 $\#$：

$$a^w \circ b^w = (a \# b)^w. \qquad (5.2.4)$$

首先有下面的命题：

命题 5.2.1 假设 $a_1, a_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_X^{2n})$. 则有

$$(a\#b)(X) = \exp\{i/2\sigma(D_{X_1}, D_{X_2})\}a(X_1)b(X_2)\,|_{X_1=X=X_2}, \qquad (5.2.5)$$

这里 $\exp\{i/2\sigma(D_{X_1}, D_{X_2})\}$ 是 $\mathbf{R}^{4n}$ 上的拟微分算子，其象征为 $\exp\{i/2\sigma(\Xi_1, \Xi_2)\}$.

证 根据定义，对于 $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 有

$$(b^w u)(z) = (2\pi)^{-n}\iint b\left(\frac{z+y}{2},\tau\right)e^{i\langle z-y,\tau\rangle}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau,$$

$$(a^w \circ b^w u)(x) = (2\pi)^{-2n}\iiiint a\left(\frac{x+z}{2},\zeta\right)b\left(\frac{z+y}{2},\tau\right) \cdot e^{i\langle x-z,\zeta\rangle + i\langle z-y,\tau\rangle}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta.$$

因此 $a^w \circ b^w$ 的 Schwartz 核为

$$(2\pi)^{-2n}\iiint a\left(\frac{x+z}{2},\zeta\right)b\left(\frac{z+y}{2},\tau\right)e^{i\langle x-z,\zeta\rangle + i\langle z-y,\tau\rangle}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta.$$

再由公式(5.2.3)就有

$$(a\#b)(x,\xi) = (2\pi)^{-2n}\iiiint a\left(\frac{x+z+t/2}{2},\zeta\right) \cdot b\left(\frac{z+x-t/2}{2},\tau\right)e^{iE}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta,$$

其中

$$E = \langle x-z+\frac{t}{2},\zeta\rangle + \langle z-x+\frac{t}{2},\tau\rangle - \langle t,\xi\rangle$$

$$= \langle x-z+\frac{t}{2},\zeta-\xi\rangle + \langle z-x+\frac{t}{2},\tau-\xi\rangle.$$

将上式中的 $\zeta-\xi, \tau-\xi, (z-x+t/2)/2, (z-x-t/2)/2$ 换成新的变量 ζ, τ, z, t. 这一变换的 Jacobi 行列式为 2^{2n}，因此得到下面的式子：

$$(a\#b)(x,\xi) = (\pi)^{-2n}\iiiint a(x+z,\xi+\zeta)b(x+t,\xi+\tau) \cdot e^{-2i\sigma((z,\zeta),(t,\tau))}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta. \qquad (5.2.6)$$

再令 $(x+z,\xi+\zeta)=Y=(y,\eta)$，$(x+t,\xi+\tau)=Z$，最后就得到

$$(a\#b)(X) = (\pi)^{-2n}\iint a(Y)b(Z)e^{-2i\sigma(Y-X,Z-X)}\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z.$$

由于 $\mathscr{F}(e^{2i\langle X,Y\rangle})=e^{-i\langle \Xi, H\rangle/2}$，将函数 $\exp\{-2i\sigma(Y-X_1,Z-X_2)\}$ 作为 $\mathbf{R}^{8n}$ 上的 Schwartz 核，则它对应的拟微分算子为

$$\exp\{-i\sigma(D_{X_1},D_{X_2})/2\},$$

这就证明了(5.2.5)．我们将经常使用它的等价式子(5.2.6)．

从(5.2.6)可以看出复合运算 # 不是一个局部性的运算．因此如同对经典的拟微分算子一样，对于"好"的象征我们给出另一种运算 $\widetilde{\#}$，即所谓渐近运算．

$$(a\,\widetilde{\#}\,b)(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i\sigma(D_X,D_Y)}{2}\right)^k a(X)b(Y)\Big|_{Y=X}. \quad (5.2.7)$$

因此有 $a\,\widetilde{\#}\,b=a\cdot b+\frac{1}{2i}\{a,b\}+\cdots$，记其有限项和为

$$\omega_N(a,b)(X)=\sum_{0\leqslant j<N}\frac{1}{j!}\left(\frac{i\sigma(D_X,D_Y)}{2}\right)^j a(X)b(Y)\Big|_{Y=X}. \quad (5.2.8)$$

下面估计 $a\#b$ 与 $a\,\widetilde{\#}\,b$ 的部分和的差，从而给出相应的象征运算．我们先研究常值度量的情况．

定义 5.2.2 *假设 g 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个正定二次型，$g\leqslant g^\sigma$，$a\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ 以及 U 为 $\mathbf{R}^{2n}$ 的开集．我们称 a 是 g-软禁于 U 上的，若任给 $k,N\in\mathbf{N}$，存在 $C_{k,N}$ 使得对于所有的 $X\in U$，$T_1,\cdots,T_k\in\mathbf{R}^{2n}$ 有*

$$\begin{aligned}&|\langle a^{(k)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|\\&\leqslant C_{k,N}\prod_{j=1}^{k}g(T_j)^{1/2}(1+g^\sigma(X-U))^{-N/2},\end{aligned} \quad (5.2.9)$$

其中 $g^\sigma(X-U)=\inf\limits_{Y\in U}g^\sigma(X-Y)$．

可以证明 g-软禁的象征的集合即为通常的急减函数空间 $\mathscr{S}$，但是我们赋 a 以下面的"软禁半范"：

$$\begin{aligned}\|a\|_{k,N}^{g,U}=&\sup_{\substack{X,T_1,\cdots,T_{k'},\\k'\leqslant k}}\Big\{|\langle a^{(k')}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_{k'}\rangle|\\&\cdot\prod_{j=1}^{k'}g(T_j)^{-1/2}(1+g^\sigma(X-U))^{N/2}\Big\},\end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\|a\|_p^{g,U}=\max_{k,N\leqslant p}\|a\|_{k,N}^{g,U}. \quad (5.2.11)$$

注 在后面的具体应用中，度量都是变系数的．因此需要特别

地重视所得到的估计是否与度量无关．

现在当 g_1,g_2 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的两个正定二次型时，我们定义其调和中值为

$$g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma=\left(\frac{g_1+g_2}{2}\right)^\sigma. \quad (5.2.12)$$

则这也是一个正定二次型．首先有

$$(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(T)=2\inf_{T=T_1+T_2}\{g_1^\sigma(T_1)+g_2^\sigma(T_2)\}. \quad (5.2.13)$$

我们就最简单的情况说明一下，详细的证明请读者自己补上．设 $g_1(t)=\lambda_1 t^2$，$g_2(t)=\lambda_2 t^2$，则有 $g_1^\sigma(t)=\lambda_1^{-1}t^2$，$g_2^\sigma(t)=\lambda_2^{-1}t^2$，以及 $g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(t)=2t^2/(\lambda_1+\lambda_2)$，因此有

$$\begin{aligned}\min_{t_1+t_2=t}\left(\frac{t_1^2}{\lambda_1}+\frac{t_2^2}{\lambda_2}\right)&=\min_{t_2}\left(\frac{(t_2-t)^2}{\lambda_1}+\frac{t_2^2}{\lambda_2}\right)\\&=\frac{\left(\frac{t\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}-t\right)^2}{\lambda_1}+\frac{\left(\frac{t\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2}{\lambda_2}\\&=\frac{t^2}{\lambda_1+\lambda_2},\end{aligned} \quad (5.2.14)$$

这就是(5.2.13)．调和中值还有下面的基本性质：

$$\begin{cases}g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma\leqslant 2g_j^\sigma, & j=1,2;\\ g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma\geqslant g_1^\sigma, & \text{若 } g_1^\sigma\leqslant g_2^\sigma.\end{cases} \quad (5.2.15)$$

事实上由定义立即有

$$\begin{aligned}g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(T)&=2\sup_{W\neq 0}\frac{\sigma(T,W)^2}{g_1(W)+g_2(W)}\\&\leqslant 2\sup_{W\neq 0}\frac{\sigma(T,W)^2}{g_j(W)}=2g_j^\sigma(T).\end{aligned}$$

关于第二个式子，利用(5.2.13)有

$$\begin{aligned}g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(T)&=2\inf_{T=T_1+T_2}\{g_1^\sigma(T_1)+g_2^\sigma(T_2)\}\\&\geqslant 2\inf_{T+T_1+T_2}\{g_1^\sigma(T_1)+g_1^\sigma(T_2)\}\\&=g_1^\sigma\wedge g_1^\sigma(T)=g_1^\sigma(T).\end{aligned}$$

此外还有下面的中值公式：

$$2g_1^\sigma(X-X_1)+2g_2^\sigma(X-X_2)$$
$$= g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma(X_1-X_2)+2(g_1^\sigma+g_2^\sigma)(X-X_{1,2}). \tag{5.2.16}$$

其中 $X_{1,2}$ 是上式左边的二次型达到极小值的点. 因为 $g_1^\sigma(X-X_1)=g_1^\sigma(X_1-X)$，以及上式的左边是两个正定二次型的和，因此关于 X 的极小点是存在的，而且等于右边的第一项(即(5.2.13)). 记此极值点为 $X_{1,2}$，并用 Taylor 公式，有

$$2g_1^\sigma(X-X_1)+2g_2^\sigma(X-X_2) = g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma(X_1-X_2)$$
$$+2\langle (g_1^\sigma(X_{1,2}-X_1))', (X-X_{1,2})\rangle$$
$$+2\langle (g_2^\sigma(X_{1,2}-X_2))', (X-X_{1,2})\rangle$$
$$+\langle (g_1^\sigma(X_{1,2}-X_1))'', (X-X_{1,2})^2\rangle$$
$$+\langle (g_2^\sigma(X_{1,2}-X_2))'', (X-X_{1,2})^2\rangle.$$

因为 g_1^σ, g_2^σ 为二次型，所以 Taylor 展开式至此截止. 但是 $X_{1,2}$ 为极值点，所以 $(g_1^\sigma(X_{1,2}-X_1))'+(g_2^\sigma(X_{1,2}-X_2))'=0$，又

$$\langle (g_1^\sigma(X_{1,2}-X_1))'', (X-X_{1,2})^2\rangle = 2g_1^\sigma(X-X_{1,2}),$$
$$\langle (g_2^\sigma(X_{1,2}-X_2))'', (X-X_{1,2})^2\rangle = 2g_2^\sigma(X-X_{1,2}).$$

这就证明了(5.2.16).

引理 5.2.3 *设 a 是一个 g-软禁于 $U_{0,1}$(以 0 为心、1 为半径的 g-球)上的象征. 则任给 $\varepsilon\in(0,1)$，我们有*

$$a(X) = \int_{U_{0,1+\varepsilon}} a_Z(X)\,|\,g\,|^{1/2}dZ, \tag{5.2.17}$$

其中 a_Z 是 g-软禁于 $U_{Z,\varepsilon}$ 上的，而且满足下面的估计：

$$\|a_Z\|_p^{g,U_{Z,\varepsilon}} \leqslant C(p,n,\varepsilon)\,\|a\|_p^{g,U_{0,1}}. \tag{5.2.18}$$

这里 $|g|$ 表示二次型 g 的行列式. 必须特别指出 $|g|$ 是辛变换下的不变量.

证 设 $\chi\in C_0^\infty([-1,1])$，满足 $\int_{\mathbf{R}^{2n}}\chi(|Z|^2)dZ=1$，因此有

$$a(X)=\int \tilde{a}_Y(X)\,|\,g\,|^{1/2}dY,$$

其中

$$\tilde{a}_Y(X)=\varepsilon^{-2n}\chi(\varepsilon^{-2}g(X-Y))a(X).$$

因为 g 是一个正定二次型，所以存在一个线性变换使得 $g(X-Y)=|Z|^2$，而这个变换的 Jacobi 行列式等于 $|g|^{1/2}$. 易见 $\tilde{a}_Y$ 的支集为 $U_{Y,\varepsilon}$，以及任给 k,N,N' 有下面的估计式：

$$\|\tilde{a}_Y\|_{k,N}^{g,U_{0,1}} \leqslant C(k,n,\varepsilon)\,\|a\|_{k,N+N'}^{g,U_{0,1}}$$
$$\cdot\,(1+\min_{S\in U_{0,1};\,T\in U_{Y,\varepsilon}} g^\sigma(S-T))^{-N'/2}. \tag{5.2.19}$$

此式可以从软禁半范的定义直接导出.

现在对于 $Y\in\mathbf{R}^{2n}$，记 $\Pi_\varepsilon(Y)\in U_{0,1+\varepsilon}$ 为满足下式的点

$$g^\sigma(Y-\Pi_\varepsilon(Y)) = g^\sigma(Y-U_{0,1+\varepsilon}).$$

当 $X\in \operatorname{supp} a_Y\subset U_{Y,\varepsilon}$ 时，我们有 $g^\sigma(X-U_{\Pi_\varepsilon(Y),\varepsilon})\leqslant g^\sigma(X-U_{0,1})$. 因此 $\tilde{a}_Y$ 在 $U_{\Pi_\varepsilon(Y),\varepsilon}$ 上的软禁半范可以用其在 $U_{0,1}$ 上的半范来控制，而由(5.2.19)可以得出下面的估计

$$\|\tilde{a}_Y\|_{k,N}^{g,U_{\Pi_\varepsilon(Y),\varepsilon}} \leqslant C(k,n,\varepsilon)\,\|a\|_{k,N+N'}^{g,U_{0,1}}$$
$$\cdot\,(1+g^\sigma(Y-U_{0,1+\varepsilon}))^{-N'/2}. \tag{5.2.20}$$

现在令

$$a_Z(X)=\int a_Y(X)\varepsilon^{-2n}\chi(\varepsilon^{-2}g(Z-\Pi_\varepsilon(Y)))\,|\,g\,|^{1/2}dY, \tag{5.2.21}$$

则再一次的有

$$a(X)=\int a_Z(X)\,|\,g\,|^{1/2}dZ.$$

显然当 $Z\notin U_{0,1+2\varepsilon}$ 时，$a_Z(X)\equiv 0$，所以上面的积分区域为 $U_{0,1+2\varepsilon}$. 另一方面，对于 $g(Z-\Pi_\varepsilon(Y))\leqslant\varepsilon^2$，在 $U_{Z,2\varepsilon}$ 上的软禁半范能由相应的 $U_{\Pi_\varepsilon(Y),\varepsilon}$ 上的软禁半范来控制，因此利用 $g\leqslant g^\sigma$，(5.2.20)和(5.2.21). 我们有

$$\|a_Z\|_{k,N}^{g,U_{Z,2\varepsilon}} \leqslant C(k,n,\varepsilon)\,\|a\|_{k,N+N'}^{g,U_{0,1}}$$
$$\cdot\int(1+g(Y-U_{0,1+2\varepsilon}))^{-N'/2}\,|\,g\,|^{1/2}dY.$$

取 $N'=2n+1$，则上面的积分是收敛的，且是与 g 无关的常数. 这就证明了引理.

引理 5.2.4 设 $G\leqslant g$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的两个正定二次型. a 是一个 g-软禁于 g-球 U 上的象征，则 a 也 G-软禁于 G-球 V 上(与 U 的中心和半径都相同)，而且有下面的估计式

$$\| a \|_{k,N}^{G,V} \leqslant \rho^{k+N} \| a \|_{k,N}^{g,U}, \tag{5.2.22}$$

其中 $\rho=\max\limits_{T\in\mathbf{R}^{2n}}(g(T)/G(T))^{1/2}$.

注意到 $g\leqslant\rho^2 G$, $g^\sigma\geqslant\rho^{-2}G^\sigma$，以及 $U\subset V$，则引理可以从软禁半范的定义直接导出.

下面的定理是这一节的主要定理. 它表明 $a_1\# a_2$ 有机地结合了 a_1 和 a_2 的软禁性质.

定理 5.2.5 假设 $g_j(j=1,2)$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的两个正定二次型，满足条件 $g_j\leqslant g_j^\sigma$. 设 a_j 是软禁于 g_j-球 U_j(半径$\leqslant 1$)上的象征. 则任给 k 和 l，我们有

$$\begin{aligned}&|\langle (a_1\# a_2)^{(l)}, T^{\otimes l}\rangle|\\ &\leqslant A_{k,l}(g_1+g_2)(T)^{l/2}[1+(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X-U_1)\\ &\quad +(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(X-U_2)]^{-k/2},\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

其中

$$A_{k,l}=C(k,n,l)\| a_1\|_{2n+1+k+l}^{g_1,U_1}\| a_2\|_{2n+1+k+l}^{g_2,U_2},$$

$T^{\otimes l}$ 表示 T 的 l 次对称张量幂.

在具体应用中，我们经常需估计其软禁半范，所以给出下面两个推论：

推论 5.2.6 任给 p,N，存在 $q=q(p,N)$，$C=C(p,N)$ 使得当 a_1,a_2 满足定理 5.2.5 的条件时，有

$$\begin{aligned}&\| a_1\# a_2\|_p^{g_1+g_2,U_1}+\| a_1\# a_2\|_p^{g_1+g_2,U_2}\\ &\leqslant C\| a_1\|_q^{g_1,U_1}\| a_2\|_q^{g_2,U_2}\\ &\quad\cdot[1+(g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma)(U_1-U_2)]^{-N}.\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

利用三角形不等式

$$\begin{aligned}&g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(U_1-U_2)^{1/2}\\ &\leqslant g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1)^{1/2}+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_2)^{1/2}.\end{aligned}$$

(5.2.24)是(5.2.23)的直接推论.

推论 5.2.7 假设 $g_j,U_j,a_j(j=1,2)$ 如同定理 5.2.5 中的一样，另外假设 $g_1\leqslant g_2$，以及 U_1,U_2 同心. 则任给 $p\in\mathbf{N}$，存在 C,q 使得

$$\| a_1\# a_2\|_p^{g_2,U_2}+\| a_2\# a_1\|_p^{g_2,U_2}\leqslant C\| a_1\|_q^{g_1,U_1}\| a_2\|_q^{g_2,U_2}. \tag{5.2.25}$$

由于 $g_1^\sigma\geqslant g_2^\sigma$，根据(5.2.15)，有 $g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma\geqslant g_2^\sigma$. 因此，由(5.2.24)直接导出(5.2.25).

定理 5.2.5 之证明 根据 g_2^σ 的定义，可以选取 $\theta=\theta_{Y_1,X}\in\mathbf{R}^{2n}$ 满足 $g_2(\theta)=1$ 以及 $\sigma(\theta,Y_1-X)=g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2}$，因此，任给 $k\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{2}\langle\theta,D_{Y_2}\rangle+1)^k e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}\\ &=e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^k.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}&=(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^{-k}\\ &\quad\cdot(1+\frac{1}{2}\langle\theta,D_{Y_2}\rangle)^k e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}.\end{aligned}$$

而另一方面

$$(a_1\# a_2)(X)=\iint e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}a_1(Y_1)a_2(Y_2)2^{2n}dY_1dY_2.$$

因此

$$\begin{aligned}(a_1\# a_2)(X)=&\iint a_1(Y_1)\sum_{0\leqslant l\leqslant k}a_2^{(l)}(Y_2)(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^{-k}\\ &\cdot e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}2^{2n}dY_1dY_2.\end{aligned}$$

其中 $a_2^{(l)}(Y_2)=C_k^l\langle a_2^{(l)}(Y_2),\theta^{\otimes l}\rangle$，因此任给 k,k_1,N，我们有

$$\begin{aligned}|(a_1\# a_2)(X)|\leqslant&\iint\| a_1\|_{0,k_1}(1+g_2^\sigma(Y_1-U_1))^{-k_1/2}\\ &\cdot(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k/2}\| a_2\|_{k,N}\\ &\cdot(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-N/2}2^{2n+k}dY_1dY_2.\end{aligned}$$

由于

$$(1+g_1^\sigma(Y_1-U_1))^{k_1/2}(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{k_1/2}$$
$$\geqslant (1+g_1^\sigma(Y_1-U_1)+g_2^\sigma(Y_1-X))^{k_1/2}$$
$$\geqslant 2^{-k_1/2}(1+g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma(X-U_1))^{k_1/2},$$

取上面两式右边的极小值，我们得到：任给 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$|(a_1 \# a_2)(X)| \leqslant C(k,n)\,\|a_1\|_{2n+1+k}\,\|a_2\|_{2n+1+k}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma(X-U_1)+g_1^\sigma \wedge g_2^\sigma(X-U_2))^{-k/2}.$$

这就证明了定理中 $l=0$ 的情况. 当 $l\geqslant 1$ 时，我们仅需利用

$$\mathrm{D}(a\# b)=(\mathrm{D}a)\# b+a\#(\mathrm{D}b),$$

这里 D 是任意的方向微分，即可最后证明定理 5.2.5.

命题 5.2.8 假设 a_1,a_2 满足定理 5.2.5 的条件. 记 $a_1\# a_2$ 的部分和的余项为

$$R_\nu(a_1,a_2)=a_1\# a_2-\omega_\nu(a_1,a_2).$$

则 $R_\nu(a_1,a_2)$ 满足下面的估计式：任给 $k,l\in\mathbf{N}$，有

$$|\langle R_\nu(a_1,a_2)^{(l)}(X),T^l\rangle| \leqslant A_{k,l,\nu}\,\Lambda_{1,2}^{-\nu}((g_1+g_2)(T))^{1/2}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1)+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_2))^{-k/2}.$$

其中

$$\Lambda_{1,2}=\inf_{T\neq 0}\left(\frac{g_1^\sigma(T)}{g_2(T)}\right)^{\frac12}=\inf_{T\neq 0}\left(\frac{g_2^\sigma(T)}{g_1(T)}\right)^{\frac12},$$
$$A_{k,l,\nu}=C(n,k,l,\nu)\,\|a_1\|_{2n+1+k+l+\nu}^{g_1,U_1}\,\|a_2\|_{2n+1+k+l+\nu}^{g_2,U_2}. \tag{5.2.26}$$

由此命题，令 $k_2=k-k_1$，我们有

$$|(a_1\# a_2)(X)| \leqslant \|a_1\|_{0,k_1}\,\|a_2\|_{k,N}\,2^{2n+k+k_1/2}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1))^{-k_1/2}\iint(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k_2/2}$$
$$\cdot(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-N/2}\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

另一方面，我们已知 $g_2\leqslant g_2^\sigma$，U_2 的 g_2-半径$\leqslant 1$，因此利用关于 $|g_2|^{1/2}$ 的三角形不等式可知，若 X_2 是 U_2 的中心，则任给 $Y_2'\in U_2$ 有

$$1+g_2(Y_2-X_2)\leqslant 1+2g_2(Y_2-Y_2')+2g_2(Y_2'-X_2)$$
$$\leqslant 3+2g_2^\sigma(Y_2-Y_2').$$

因此 $1+g_2(Y_2-X_2)\leqslant 3(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))$. 由此导出

$$|(a_1\# a_2)(X)| \leqslant C(n,N,k,k_1)\,\|a_1\|_{0,k_1}\,\|a_2\|_{k,N}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1))^{-k_1/2}$$
$$\cdot\iint(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k_2/2}(1+g_2(Y_2-X_2))^{-N/2}\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

现在取 $k_2=N=2n+1$，由于 $|g_2|\cdot|g_2^\sigma|=1$，上式中的积分收敛，且是一个仅依赖于 n 的常数. 因此这就证明了对于所有的 $k_1\in\mathbf{N}$，有

$$|(a_1\# a_2)(X)| \leqslant C(k_1,n)\,\|a_1\|_{0,k_1}\,\|a_2\|_{2n+1+k,2n+1}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1))^{-k_1/2}.$$

同样的方法可以得到

$$|(a_1\# a_2)(X)| \leqslant C(k_1,N)\,\|a_2\|_{0,k_1}\,\|a_1\|_{2n+1+k,2n+1}$$
$$\cdot(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_2))^{-k_1/2}.$$

注 类似于推论 5.2.6，由命题 5.2.8 可以得到下面的估计式：任给 p,N,ν，有

$$\|R_\nu(a_1,a_2)\|_p^{g_1+g_2,U_1}+\|R_\nu(a_1,a_2)\|_p^{g_1+g_2,U_2}$$
$$\leqslant C(p,N,\nu)\,\|a_1\|_{q(p,N,\nu)}^{g_1,U_1}\,\|a_2\|_{q(p,N,\nu)}^{g_2,U_2}$$
$$\cdot\Lambda_{1,2}^{-\nu}(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(U_1-U_2))^{-N}. \tag{5.2.27}$$

命题 5.2.8 之证明 首先有 $\sigma(Y,Z)=\langle Z,\sigma Y\rangle$，其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 $\mathbf{R}^{2n}$ 与它的对偶空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 的对偶积. 这里符号 σ 同时表示辛变换和辛内积. 因此由$(a_1\# a_2)$的公式(5.2.6)，有

$$(a_1\# a_2)(X)=\int a_1\Big(X+\frac12\sigma^{-1}\Xi\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle X,\Xi\rangle}\hat{a}_2(\Xi)\mathrm{d}\Xi. \tag{5.2.28}$$

这只是在(5.2.6)中令 $2\sigma(Y-X)=\Xi$ 即可. 现在对于 a_1 作 Taylor 展开：

$$(a_1\# a_2)(X)=\sum_{0\leqslant j<\nu}a_1^{(j)}(X)\int\Big(\frac12\sigma^{-1}\Xi\Big)^j\frac{1}{j!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle X,\Xi\rangle}\hat{a}_2(\Xi)\mathrm{d}\Xi$$
$$+\int_0^1\frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\int a_1^{(\nu)}\Big(X+\frac{\theta\sigma^{-1}\Xi}{2}\Big)\Big(\frac12\sigma^{-1}\Xi\Big)^\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle X,\Xi\rangle}\hat{a}_2(\Xi)\mathrm{d}\Xi\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$R_\nu(a_1,a_2)(X)$$
$$=\int_0^1\frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\iint\langle a_1^{(\nu)}(X+\theta(Y_1-X)),(Y_1-X)^\nu\rangle$$
$$\cdot\, e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}a_2(Y_2)2^{2n}dY_1dY_2d\theta.$$

同定理 5.2.5 的证明一样，取 $T=T_{Y_1,X}$ 使得 $g_2(T)=1$，以及 $\sigma(T,Y_1-X)=g_2^\sigma(Y_2-X)^{1/2}$，则任给 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$(1+g_2^\sigma(Y_1-X)^{1/2})^k(\frac{1}{2}\langle T,D_{Y_2}\rangle+1)^k e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}$$
$$=e^{-2i\sigma(Y_1-X,Y_2-X)}.$$

因此由软禁半范的定义，有

$$|R_\nu(a_1,a_2)(X)|\leqslant\int_0^1\iint\frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\|a_1\|_{\nu,k_1}$$
$$\cdot\,(1+g_1^\sigma(X+\theta(Y_1-X)-U_1))^{-k_1/2}$$
$$\cdot\, g_1(Y_1-X)^{\nu/2}\|a_2\|_{k,N}(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k/2}$$
$$\cdot\,(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-N/2}2^{2n+k}dY_1dY_2d\theta.$$

由于 $\theta\in[0,1]$，以及 g_2^σ 是二次齐次函数，因此 $g_2^\sigma(Y_1-X)\geqslant g_2^\sigma(\theta(Y_1-X))$. 令 $k=k_1+k_2+\nu$，$N=2n+1=k_2$，则有

$$|R_\nu(a_1,a_2)(X)|\leqslant\int_0^1\iint\frac{(1-\theta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}2^{2n+k_2+\nu+3/2k_1}\|a_1\|_{\nu,k_1}$$
$$\cdot\,(1+g_1^\sigma\wedge g_2^\sigma(X-U_1))^{-k_1/2}\Lambda_{1,2}^{-\nu}\|a_2\|_{k_1+k_2+\nu,2n+1}$$
$$\cdot\,(1+g_2^\sigma(Y_1-X))^{-k_2/2}$$
$$\cdot\,(1+g_2^\sigma(Y_2-U_2))^{-(2n+1)/2}dY_1dY_2d\theta.$$

然后完全同定理 5.2.5 一样，可以证明当 $l=0$ 时命题是成立的. $l\geqslant1$ 时的证明也是完全类似的.

我们现在研究 Weyl 运算与经典的拟微分运算之间的关系. 如同在(5.2.1)中一样，对于 $a\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$，我们可以定义一个拟微分算子 $a(x,D)$ 为

$$a(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint a(x,\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}u(y)dyd\xi.\quad(5.2.29)$$

这是一个从 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 的连续映射. 类似于此，$\tilde{a}(x,D)$ 的共轭算子为

$$\tilde{a}(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint a(y,\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}u(y)dyd\xi.\quad(5.2.30)$$

这也是一个从 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 的连续映射.

定理 5.2.9 设 $a,b,c\in\mathscr{S}(\mathbf{R}_X^{2n})$，则 $a(x,D)=b^w(x,D)=\tilde{c}(x,D)$，当且仅当

$$\begin{cases}b(x,\xi)=e^{-i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi)=e^{i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}c(x,\xi),\\ a(x,\xi)=e^{i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}b(x,\xi)=e^{i\langle D_x,D_\xi\rangle}c(x,\xi),\\ c(x,\xi)=e^{-i\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi)=e^{-i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}b(x,\xi).\end{cases}\quad(5.2.31)$$

以及若 $a(x,D)\circ b(x,D)=c(x,D)$，则

$$c(x,\xi)=e^{i\langle D_\xi,D_y\rangle}a(x,\xi)b(y,\eta)|_{(y,\eta)=(x,\xi)}.\quad(5.2.32)$$

定理的结论对于 $S(m,g)$ 中的元也成立.

证 设 $K\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 是 $a(x,D)$ 的 Schwartz 核，则

$$K(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a(x,\xi)d\xi.$$

由于 $a(x,D)=b^w(x,D)$，因此它们的 Schwartz 核是相等的，由(5.2.3)有

$$b(x,\xi)=\int K(x+t/2,x-t/2)e^{-i\langle t,\xi\rangle}dt$$
$$=(2\pi)^{-n}\iint a(x+t/2,\eta)e^{i\langle t,\eta-\xi\rangle}d\eta dt$$
$$=(\pi)^{-n}\iint a(x+t,\xi+\eta)e^{2i\langle t,\eta\rangle}d\eta dt$$
$$=e^{-i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi).$$

这里 $\mathscr{F}(\pi^{-n}e^{2i\langle t,\eta\rangle})=e^{-i/2\langle x,\xi\rangle}$，因此上面的卷积定义了相应的拟微分算子. 这就证明了(5.2.31)的第一个式子. 其他的证明是类似的.

关于(5.2.32)，我们记 $a(x,D)=\tilde{a}^w(x,D)$，$b(x,D)=\tilde{b}^w(x,D)$. 则由(5.2.31)有

$$\tilde{a}(x,\xi)=e^{-i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi);$$
$$\tilde{b}(x,\xi)=e^{-i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}b(x,\xi).$$

由命题 5.2.1，记 $\tilde{c}^w(x,D)=\tilde{a}^w\circ\tilde{b}^w$，则有

$$\tilde{c}(x,\xi)=(\tilde{a}\#\tilde{b})(x,\xi)$$
$$=e^{i/2(\langle D_\xi,D_y\rangle-\langle D_x,D_\eta\rangle)}\tilde{a}(x,\xi)\tilde{b}(y,\eta)\,|_{(x,\xi)=(y,\eta)}.$$

因此

$$c(x,\xi)=e^{i/2\langle D_x,D_\xi\rangle}\tilde{c}(x,\xi)=e^{iE}a(x,\xi)b(y,\eta)\,|_{(x,\xi)=(y,\eta)}.$$

其中

$$E=\langle D_X+D_Y,D_\xi+D_\eta\rangle+\langle D_\xi,D_Y\rangle$$
$$-\langle D_X,D_\eta\rangle-\langle D_X,D_\xi\rangle-\langle D_Y,D_\eta\rangle$$
$$=\langle D_\xi,D_Y\rangle,$$

这就证明了(5.2.32).

记 $J^t a(x,\xi)=e^{it\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi)$，则$\{J^t\}_{t\in\mathbf{R}}$是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$上的一个算子半群，我们有下面的软禁估计：

命题 5.2.10 *设 g 是 $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_\xi$ 上的一个正定二次型，$g\leqslant g^\sigma$ 以及 $g(x,\xi)=g(x,-\xi)$，设 $a\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$是一个 g-软禁于一个半径 $r\leqslant 1$ 的 g-球上的象征. 则任给 $p,\nu\in\mathbf{N}$，存在$C(p,\nu),q(p,\nu),\mu(p,\nu)$使得*

$$\|J^t a-\sum_{0\leqslant j<\nu}(it\langle D_x,D_\xi\rangle)^j a/j!\|_p^{g,U}$$
$$\leqslant C\|a\|_q^{g,U}\lambda^{-\nu}(1+|t|)^\mu, \tag{5.2.33}$$

其中 $\lambda=\inf\limits_{T\neq 0}(g^\sigma(T)/g(T))^{1/2}$.

证 为了简化证明，我们将上式左边的软禁球的半径适当放大为 $r'=\sqrt{2}r$，另一方面，由于 $g(x,\xi)=g(x,-\xi)$，经过 $\mathbf{R}^n_x$ 上的一个线性变换及由它导出的 $\mathbf{R}^{2n}$上的仿射辛变换，可以设

$$g=\sum_{j=1}^n h_j(dx_j^2+d\xi_j^2),$$

而由 $g\leqslant g^\sigma$ 导出 $h_j\leqslant 1$，记 $\gamma=\sum dx_j^2$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的二次型，则 $\gamma^\sigma=\sum h_j^{-1}dx_j^2$，由定义

$$J^t a(x,\xi)=\iint e^{-it^{-1}\langle y-x,\eta-\xi\rangle}a(y,\eta)dyd\eta\,|t|^{-n}.$$

则任给 k，有下面的恒等式

$$\Big(1+\sum_{j=1}^n t^{-1}h_j^{-1}(x_j-y_j)D_{\eta_j}\Big)^k e^{-it^{-1}\langle y-x,\eta-\xi\rangle}$$
$$=\Big(1+\sum_{j=1}^n t^{-1}h_j^{-1}(x_j-y_j)^2\Big)^k e^{-it^{-1}\langle y-x,\eta-\xi\rangle}.$$

因此关于 η 分部积分，立即有

$$|J^t a(x,\xi)|\leqslant C\iint(1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-k/2}\|a\|_{k,N}$$
$$\cdot(1+g^\sigma((y,\eta)-U))^{-N/2}dyd\eta.$$

设 V,W 分别是 $\mathbf{R}^n_x$和 $\mathbf{R}^n_\xi$ 中半径为 r 的 γ-球，取 $k=N=l+n+1$ 则有

$$|J^t a(x,\xi)|\leqslant C\|a\|_{k,N}\int(1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-l/2}$$
$$\cdot(1+\gamma^\sigma(y-V))^{-l/2}(1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{-(n+1)/2}$$
$$\cdot(1+\gamma^\sigma(\eta-W))^{-(n+1)/2}dyd\eta.$$

由于

$$(1+t^{-2}\gamma^\sigma(x-y))^{l/2}(1+\gamma^\sigma(y-V))^{l/2}\geqslant C_l(1+\gamma^\sigma(x-V))^{l/2},$$

以及

$$(1+\gamma^\sigma(\eta-W))^{-(n+1)/2}\leqslant C(1+\gamma(\eta))^{-(n+1)/2},$$

我们就证明了，任给 $l\in\mathbf{N}$ 有

$$|J^t a(x,\xi)|\leqslant C_l\|a\|_{l+n+1}(1+\gamma^\sigma(x-V))^{-l/2}.$$

对变量 x 作同样的推理，可得到类似的估计. 由于 $V\otimes W\subset U_{r'}$，因此我们就证明了当 $\nu=0$ 时(5.2.33)在半径为 r'的g-球上成立(关于其微分的估计，只要注意到 J^t 与微分算子可交换即可).

对于 $\nu\geqslant 1$，利用 J^t 的 Taylor 展式，以及 $\nu=0$ 时已有的关于 $J^{\theta t}$ 的估计式，就可以同命题 5.2.8 一样完成现在的证明.

5.3 单位分解和对称缓增

由于在一些情况下，我们将在 $\mathbf{R}^{2n}$的某个子集 Ω 上考虑问题，因此给出下面的对称缓增的概念. 另一方面，在前一节我们已经看到软禁于一个球上的象征有很好的性质，因此我们希望将 $S(m,g)$

中的元都分解成这样的软禁象征的和，本节就来研究这些问题.

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^{2n}$ 是一个开集，g 为 Ω 上的一个缓变的度量，满足 $g_X\leqslant g_X^\sigma$. 定义以 $X\in\Omega$ 为中心，r 为半径的 g-球为

$$U_{X,r}=\{Y;\ g_X(Y-X)<r^2\}. \tag{5.3.1}$$

称 Ω 的一个开集为一个 g-锥，若对于某个固定的 $r>0$，它是半径为 r 的 g-球的并.

例 设 $g=dx^2+|\xi|^{-2}d\xi^2$，则 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的 g-锥是形如 $\omega\times\Gamma$ 的开集，这里 ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集，Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个光滑的锥.

设 V 是 Ω 的开子集. 记

$$V_r=\{X\in V;\ U_{X,r}\subset V\},$$
$$V'\subset\subset V\Leftrightarrow\exists r>0,\ V'\subset V_r. \tag{5.3.2}$$

定义 5.3.1（对称缓增） *称 Ω 上的度量 g 是对称缓增的，若存在 C_1 和 N_0 使得：$\forall X,Y\in\Omega$，$\forall T\in\mathbf{R}^{2n}$ 有*

$$g_Y(T)\leqslant C_1g_X(T)(1+g_{XY}^\sigma(X-Y))^{N_0}, \tag{5.3.3}$$

其中

$$g_{XY}^\sigma=g_X^\sigma\wedge g_Y^\sigma=\left(\frac{g_X+g_Y}{2}\right)^\sigma.$$

对称缓增是一个比缓增更强的概念. 但是在 $\Omega=\mathbf{R}^{2n}$ 时这两个概念是等价的. 因为由 g_{XY}^σ 的定义，存在 $Z\in\mathbf{R}^{2n}$ 使得

$$g_{XY}^\sigma(X-Y)=2(g_X^\sigma(X-Z)+g_Y^\sigma(Y-Z)).$$

因此，若 g 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上是缓增的，则

$$\frac{g_Y(\cdot)}{g_Z(\cdot)}\leqslant C(1+g_Y^\sigma(Y-Z))^{N_1},$$

以及

$$\frac{g_Z(\cdot)}{g_X(\cdot)}\leqslant C(1+g_X^\sigma(Z-X))^{N_1}.$$

由这两个式子就可以导出(5.3.3). 但是当 $\Omega\neq\mathbf{R}^{2n}$ 时，上面的 Z 不一定在 Ω 中. 因此，一般来说对称缓增比缓增要强.

定理 5.3.2（连续单位分解） *假设 Ω 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 的一个开集. 对于 $0<r<r'$，设 Ω_r 和 $\Omega_{r'}$ 是(5.3.2)中定义的开集. 那么存在一个在 $S(1,g)$ 中一致有界的象征族 $\{\varphi_Y\}_{Y\in\Omega_r}$，其支集包含在球 $U_{Y,r}$ 中，使得我们有*

$$\int_{\Omega_r}\varphi_Y|g_Y|^{1/2}dY=1,\quad \text{在 } \Omega_{r'} \text{ 上}. \tag{5.3.4}$$

注 这里 $\{\varphi_Y\}$ 在 $S(1,g)$ 中一致有界是指：$\forall k\in\mathbf{N}$ 有

$$\sup_{X,Y,T_1,\cdots,T_k}\frac{|\langle\varphi_Y^{(k)}(X);\ T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|}{\prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}}<+\infty.$$

证 设 $s\to\chi_0(s)$ 是一个单调下降的 C^∞ 函数. 当 $s<1/2$ 时，$\chi_0(s)=1$，当 $s>1$ 时 $\chi_0(s)=0$. 令

$$\Gamma(X,\delta)=\int_\Omega\chi_0(\delta^{-1}g_Y(X-Y))|g_Y|^{1/2}dY,$$

其中 $\delta\leqslant C_0^{-1}$. 很容易验证存在常数 L_0 以及 C_k（它们仅依赖于 C_0，r,r',δ），使得

$$\forall X\in\Omega_r,\quad \Gamma(X,\delta)\geqslant L_0; \tag{5.3.5}$$

$$\forall X\in\Omega,\quad |\langle\Gamma^{(k)}(X,\delta);\ T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|\leqslant C_k\prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}. \tag{5.3.6}$$

我们验证一下 $k=1$ 和 $k=2$ 的情况：

$$\langle\Gamma^{(1)}(X,\delta),T\rangle=\delta^{-1}\int_\Omega\chi_0^{(1)}(\delta^{-1}g_Y(X-Y))$$
$$\cdot\langle\partial_Xg_Y(X-Y),T\rangle|g_Y|^{1/2}dY.$$

由于

$$|\langle\partial_Xg_Y(X-Y),T\rangle|\leqslant g_Y(X-Y)^{1/2}g_Y(T)^{1/2},$$

以及当 $\delta^{-1}g_Y(X-Y)\geqslant1$ 时 $\chi_0^{(1)}(\delta^{-1}g_Y(X-Y))=0$，因此

$$|\langle\Gamma^{(1)}(X,\delta),T\rangle|$$
$$\leqslant\delta^{-1}g_X(T)^{1/2}\int\Omega|\chi_0^{(1)}(\delta^{-1}g_Y(x-Y))||g_Y|^{1/2}dY$$
$$\leqslant C_1g_X(T)^{1/2}.$$

当 $k=2$ 时，只要利用

$$|\langle\partial_X^2g_Y(X-Y),T_1\otimes T_2\rangle|\leqslant Cg_Y(T_1)^{1/2}g_Y(T_2)^{1/2}$$

即可. 而当 $k\geqslant 3$ 时 $\partial_X^3 g_Y(X-Y)\equiv 0$. 这就完全证明了(5.3.6).

另一方面, 利用度量 g 的缓变性, 对于充分小的 δ 我们有

$$U_{Y,\delta}\cap\Omega_{r'}\neq\varnothing\Rightarrow Y\in\Omega_r; \tag{5.3.7}$$

$$Y\in\Omega_{r'}\Rightarrow U_{Y,\delta}\subset\Omega_r. \tag{5.3.8}$$

现在令 $\varphi_Y(X)=\Gamma(X,\delta)^{-1}\chi_0(\delta^{-1}g_Y(X-Y))$, 则有

$$\text{supp}\,\varphi_Y\subset\{X;\ g_Y(X-Y)\leqslant\delta\}=U_{Y,\delta}.$$

而 $\{\varphi_Y\}_{Y\in\Omega_r}$ 在 $S(1,g)$ 中的一致有界性则由(5.3.6)直接给出. 同时, 当 $X\in\Omega_{r'}$ 时有

$$\int_{\Omega_r}\varphi_Y(X)\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$

$$=\Gamma(X,\delta)^{-1}\int_{\Omega_r}\chi_0(\delta^{-1}g_Y(X-Y))\,|g_Y|^{-1}\mathrm{d}Y,$$

由于 $X\in U_{Y,\delta}\cap\Omega_{r'}\Rightarrow Y\in\Omega_r$, 上面的在 $\Omega_{r'}$ 上积分等于其在 Ω 上的积分. 因此上式的右端 $\equiv 1$. 这就证明了定理 5.3.2.

这一单位分解与前面的离散单位分解有同样的作用. 例如, 若 $a\in S(1,g,\Omega)$, $\text{supp}\,a\subset\Omega_{r'}$ $(r'>0)$, 令 $a_Y=a\cdot\gamma_Y$, 则有

$$a=\int a_Y\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y, \tag{5.3.9}$$

而且 $\{a_Y\}$ 在 $S(1,g,\Omega)$ 中一致有界, 以及 $\text{supp}\,a_Y\subset U_r$.

我们还要经常用到上述结论的逆命题, 其证明是类似的.

引理 5.3.3 *假设 $0<r<r'$, 则存在 $\delta>0$, 使得对于 $S(1,g)$ 中任意一个一致有界的族 $\{a_Y\}_{Y\in\Omega}$, 若 $a_Y\in S(1,g_Y)$, $\text{supp}\,a_Y\subset U_{Y,\delta}$, 则函数*

$$a(X)=\int_{\Omega_{r'}}a_Y(X)\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$

属于 $S(1,g,\Omega)$ 以及 $\text{supp}\,a\subset\Omega_r$.

对于 $a\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$, 我们使用下面的软禁半范

$$\|a\|_{p,Y,r}=\|a\|_p^{g_Y,U_{Y,r}}. \tag{5.3.10}$$

对于 $X,Y\in\Omega_r$, 记

$$\delta_r(X,Y)=1+\inf\{g^\sigma_{XY}(X'-Y'),\ X'\in U_{X,r},\ Y'\in U_{Y,r}\}. \tag{5.3.11}$$

从直观上看 δ_r 类似于 Ω 上的一个"距离". 它也将起到类似于距离的作用.

下面的定理是 Weyl 运算中的一个关键的定理, 它证明了若两个象征分别软禁于 Y 和 Z 附近, 则它们的复合可以同时软禁于这两点的附近. 而且其软禁半范以 $\delta(Y,Z)$ 的任意阶幂下降.

定理 5.3.4 (双重软禁定理) *假设 g 是定义于 Ω 上的一个缓变、对称缓增以及满足测不准原理的度量, 则 $\forall\,p,N,\nu$, $\exists\,q,C$ (仅依赖于缓变、缓增常数以及 p,N,ν), 使得对于任意的 $a,b\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $r\leqslant C_0^{1/2}$, $Y,Z\in\Omega_r$, 我们有下面的估计*

$$\left\|a\#b-\sum_{0\leqslant k<\nu}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma(\mathrm{D}_{X_1},\mathrm{D}_{X_2})\right)^k(a\otimes b)|_{\text{对角线}}\right\|_{p,Y,r}$$

$$\leqslant C\|a\|_{q,Y,r}\|b\|_{q,Y,r}\lambda_g(Y)^{-\nu}\delta_r(Y,Z)^{-N}. \tag{5.3.12}$$

证 我们现在利用 5.2 节的结论, 假设 $r^2\leqslant C_0^{-1}$, 由于 g 是缓变的, g^σ 也是缓变的, 因此当 $Y'\in U_{Y,r}$, $Z'\in U_{Z,r}$ 时, $g^\sigma_Y\geqslant C_0^{-1}g^\sigma_{Y'}$, $g^\sigma_Z\geqslant C_0^{-1}g^\sigma_{Z'}$. 因此

$$\begin{aligned}\delta_r(Y,Z)^{N_0}&=(1+\inf g^\sigma_{YZ}(Y'-Z'))^{N_0}\\&\geqslant(1+\inf g^\sigma_{Y'Z'}(Y'-Z'))^{N_0}C_0^{-N_0}\\&\geqslant C_1^{-1}C_0^{-N_0}\inf\frac{g_{Y'}(T')}{g_{Z'}(T')}\\&\geqslant C_1^{-1}C_0^{-N_0-2}\frac{g_Y(T)}{g_Z(T)},\end{aligned}$$

这就证明了

$$\sup_T\frac{g_Y(T)}{g_Z(T)}\leqslant C_1C^{N_0+2}\delta_r(Y,Z)^{N_0}. \tag{5.3.13}$$

利用命题 5.2.8 的估计式(5.2.27), 对任意的 N' 有

$$\|R_\nu(a,b)\|_p^{g_Y+g_Z,U_{Y,r}}$$

$$\leqslant C(p,\nu,N')\|a\|_{q(p,\nu,N')}^{g_Y,U_{Y,r}}\|b\|_{q(p,\nu,N')}^{g_Z,U_{Z,r}}$$

$$\cdot\left(\inf_{T\neq0}\frac{g^\sigma_Z(T)}{g_Y(T)}\right)^{-\frac{\nu}{2}}(1+g^\sigma_Y\wedge g^\sigma_Z(U_{Y,r}-U_{Z,r}))^{-N'}.$$

现在 $\delta_r(Y-Z)=1+g^\sigma_Y\wedge g^\sigma_Z(U_{Y,r}-U_{Z,r})$ 以及

$$g_Z^\sigma(T) \geqslant g_Y^\sigma(T) C_1^{-1} (1 + g_{Y,Z}^\sigma(Y - Z))^{-N_0},$$

$$(g_Y + g_Z)(T) \leqslant 2C_1 g_Y(T)(1 + g_{Y,Z}^\sigma(Y - Z))^{-N_0}.$$

将左边的 $g_Y + g_Z$ 用 g_Y 代替，则右边多出一个因子 $\delta_r(Y,Z)^{N_0 p/2}$. 这就得到了

$$\| R_\nu(a,b) \|_{p,Y,r}$$

$$\leqslant C \| a \|_{q,Y,r} \| b \|_{q,Z,r} \lambda_g(Y)^{-\nu} \delta_r(Y,Z)^{-N'+N_0(p+\nu)/2},$$

其中 $C = C(p,\nu,N')C_1 C_0^{N_0+2}$. 因此，取 $N' = N + N_0(p+\nu)/2$ 就可以得到(5.3.12).

关于函数 $\delta_r(Y,Z)$，我们有下面的结果

定理 5.3.5 *存在常数 $N_1, N_2, C_2, C_3, C_4, r_0$，它们仅依赖于缓变常数 C_0、缓增常数 C_1 和 N_0，使得我们有*

$$\sup_{X \in \Omega_r,\ r^2 \leqslant C_0^{-1}} \int_{\Omega_r} \delta_r(X,Y)^{-N_1} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y \leqslant C_2, \tag{5.3.14}$$

以及

$$r \leqslant r_0 \text{ 和 } g_X(Y - X) \geqslant C_3 r^2 \Rightarrow$$

$$\lambda_g(X) + \lambda_g(Y) \leqslant C_4 r^{-2} \delta_r(X,Y)^{N_2}. \tag{5.3.15}$$

证 任给 $X, Y \in \Omega_r$，由三角形不等式以及(5.3.13)，任给 X', Y', T 有

$$1 + g_X(X - Y) \leqslant 4[1 + g_X(X - X') + g_X(X' - T) + g_X(T - Y') + g_X(Y' - Y)]$$

$$\leqslant 4[1 + g_X(X - X') + g_X^\sigma(X' - T) + g_Y^\sigma(T - Y') + g_Y(Y' - Y) C_1 C_0^{N_0+2} \delta_r(X - Y)^{N_0}],$$

现对 $X' \in U_{X,r}$, $Y' \in U_{Y,r}$ 以及 $T \in \mathbf{R}^{2n}$ 取极小值，并且利用

$$g_{XY}^\sigma(X' - Y') = 2 \inf_T \{ g_X^\sigma(X' - T) + g_Y^\sigma(T - Y') \},$$

可以得到

$$1 + g_X(X - Y) \leqslant C_1 C_0^{N_0+2} \delta_r(X,Y)^{N_0} (8r^2 + \delta_r(X,Y))$$

$$\leqslant C_1 C_0^{N_0+2} \delta_r(X,Y)^{N_0+1}.$$

同样的，利用(5.3.13)可以得到

$$|g_Y|^{1/2} \leqslant |g_X|^{1/2} \delta_r(X,Y)^{nN_0} (C_1 C_0^{N_0+2})^n.$$

因此

$$(1 + g_X(X - Y))^{2n+1} |g_X|^{-1/2}$$

$$\leqslant C \delta_r(X,Y)^{(N_0+1)(2n+1)+nN_0} |g_Y|^{-1/2}.$$

取 $N_1 \geqslant (2n+1)(N_0+1) + nN_0$ 即可得到(5.3.14).

关于(5.3.15)，首先，存在 X', Y', Z' 使得

$$\delta_r(X,Y) = 1 + 2g_X^\sigma(X' - Z') + 2g_Y^\sigma(Y' - Z').$$

因此，由 λ_g 的定义以及(5.3.13)，

$$\lambda_g(X)^2 g_X(X' - Y') \leqslant g_X^\sigma(X' - Y')$$

$$\leqslant 2g_X^\sigma(X' - Z') + 2g_X^\sigma(Z' - Y')$$

$$\leqslant C_1 C_0^{N_0+2} \delta_r(Y,X)^{N_0} (2g_X^\sigma(X' - Z') + 2g_Y^\sigma(Z' - Y'))$$

$$\leqslant C_1 C^{N_0+1} \delta_r(X,Y)^{N_0+1}.$$

这里我们利用了(5.3.13)的另外一种形式：

$$\frac{g_X^\sigma(T)}{g_Y^\sigma(T)} \leqslant \delta_r(X,Y)^{N_0} C_1 C_0^{N_0+2}.$$

现在取 C_3 充分大(比 C_0 大)，使得当 $g_X(X-Y) \geqslant C_3 r^2$, $X' \in U_{X,r}$, $Y' \in U_{Y,r}$ 时，有 $g_X(X' - Y') \geqslant r^2$. 这就导出了

$$\lambda_g(X) \leqslant C_4 r^{-2} \delta_r(X,Y)^{N_2}.$$

关于 $\lambda_g(Y)$ 的估计式，可由(5.3.13)的推论式

$$\frac{\lambda_g(Y)}{\lambda_g(X)} \leqslant C \delta_r(X,Y)^{N_0} \tag{5.3.16}$$

导出.

5.4 象征运算

我们现在研究算子的象征运算. 假设 g 是定义在 $\Omega \subset \mathbf{R}^{2n}$ 上的一个缓变、缓增以及满足测不准原理的度量. 称 $m(X)$ 为 g 的一个允许权函数，若它关于 g 是缓变的，以及下面意义下是缓增的：存在 C, N 使得任给 $X, Y \in \Omega$，有

$$\frac{m(Y)}{m(X)} \leqslant C(1+g^{\sigma}_{XY}(X-Y))^N. \tag{5.4.1}$$

利用上一节的结果，我们立即可以得到

$$\sup_T \frac{g_Y(T)}{g_X(T)} \leqslant C\delta_r(X,Y)^{N_0}; \tag{5.4.2}$$

$$\frac{\lambda_g(Y)}{\lambda_g(X)} \leqslant C\delta_r(X,Y)^{N_0}; \tag{5.4.3}$$

$$\frac{m(Y)}{m(X)} \leqslant C\delta_r(X,Y)^{N}. \tag{5.4.4}$$

由于存在 X',Y',Z 使得

$$\delta_r(X,Y)=1+2g^{\sigma}_X(X'-Z)+2g^{\sigma}_Y(Y'-Z),$$

因此对于固定的 $T_0\in\mathbf{R}^{2n}$，$g_X(T_0)$以及 $\lambda_g(X)^s$ 都是 g 的允许权函数. $\mu(X)=|\sigma(X,T_0)|+g^{\sigma}_X(T_0)^{1/2}$ 也是 g 的一个允许权函数. μ 显然是缓变的，今证 μ 适合(5.4.1). 事实上

$$\begin{aligned}
|\sigma(X,\ T_0)| &= |\langle X,\sigma T_0\rangle| \\
&= |\sigma(Y,T_0)+\langle X-Y,\sigma T_0\rangle| \\
&\leqslant |\sigma(Y,T_0)|+|\sigma(X-Y,T_0)| \\
&\leqslant |\sigma(Y,T_0)|+g_Y(X-Y)^{1/2}g^{\sigma}_Y(T_0)^{1/2} \\
&\leqslant |\sigma(Y,T_0)|+C'(g_X \wedge g_Y)(X-Y)^{1/2} \\
&\quad \cdot g^{\sigma}_Y(T_0)^{1/2}(1+g^{\sigma}_{XY}(X-Y))^{N_0} \\
&\leqslant C'(|\sigma(Y,T_0)|+g^{\sigma}_Y(T_0)^{1/2}) \\
&\quad \cdot (1+g^{\sigma}_{XY}(X-Y))^{N_0+1}.
\end{aligned}$$

因此

$$\mu(X)\leqslant C''\mu(Y)(1+g^{\sigma}_{XY}(X-Y))^{N_0+1}.$$

上面也同时证明了

$$L(X)=\sigma(X,T_0)\in S(\mu,g). \tag{5.4.5}$$

定义 5.4.1（内算子） 假设 m 是 g 的一个允许权函数，V 是 Ω 的一个开子集. 我们称一个算子 A 属于 $\mathcal{O}(m,g,V)$，若存在 $r\leqslant C_0^{-1/2}$，$r<r'$，以及一个一致软禁于 $U_{Y,r}$ 上的可测象征族(a_Y)使得

$$A=\int_{V_{r'}} m(Y)a^w_Y|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y. \tag{5.4.6}$$

注 上面的分解式不是唯一的. 利用 g 的缓变性以及引理5.2.3，我们能假设 r 充分的小，而且上面的积分是强收敛的.

定理 5.4.2（算子的连续性） 1) 内算子都是从 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$到其自身，以及 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$到其自身的连续映射，积分(5.4.6)是强收敛的.

2) 若 $m=1$，则内算子是 $L^2(\mathbf{R}^n)$到其自身的连续映射.

3) 内算子的全体形成一个分级代数，其乘法为算子的复合，分级群为 g 的允许权函数组成的乘法群，即：若 $A\in\mathcal{O}(m_1,g,\Omega)$，$B\in\mathcal{O}(m_2,g,\Omega)$，则有 $A\circ B, B\circ A\in\mathcal{O}(m_1m_2,g,\Omega)$. 同时还有 $A^*\in\mathcal{O}(m_1,g,\Omega)$.

为了证明一个算子在 Hilbert 空间上的连续性，我们利用标准方法——Cotlar 引理，即关于一族几乎正交的算子的估计. 下面的引理比经典的形式更为精细.

引理 5.4.3 假设 H 是一个 Hilbert 空间，$(A_j)_{j\in\mathrm{N}}$是 H 上的一族有界算子，它们满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}
&\sup_{j\in\mathrm{N}}\sum_{k\in\mathrm{N}}\|A_j^*A_k\|^{1/2}\leqslant M,\\
&\sup_{j\in\mathrm{N}}\sum_{k\in\mathrm{N}}\|A_jA_k^*\|^{1/2}\leqslant M.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.7}$$

则，对任给 $u\in H$，我们有

$$\sum_j\sum_k|(A_ju,A_ku)_H|\leqslant M^2\|u\|_H^2. \tag{5.4.8}$$

这就意味着 $A=\sum_j A_j$ 具强收敛性，以及 $\|A\|\leqslant M$.

我们证明下面的更为一般的形式(比较[Qi]引理 5.5.16).

引理 5.4.3′ 假设 H 是一个 Hilbert 空间，$(\Omega,\mathrm{d}v)$是一个测度空间，$\mathrm{d}v$ 是正的以及σ-有限的，$(A_Y)_{Y\in\Omega}$是 H 上的一族有界可测算子，它们满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}
&\sup_{Y\in\Omega}\int_\Omega\|A_Y^*A_Z\|^{1/2}\mathrm{d}v(Z)\leqslant M,\\
&\sup_{Y\in\Omega}\int_\Omega\|A_YA_Z^*\|^{1/2}\mathrm{d}v(Z)\leqslant M.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.7'}$$

则，对任给 $u\in H$，我们有

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |(A_Y u, A_Z u)_H| \mathrm{d}v(Y)\mathrm{d}v(Z) \leqslant M^2 \|u\|_H^2. \quad (5.4.8)'$$

这就意味着 $A=\int_\Omega A_Y \mathrm{d}v(Y)$ **具强收敛性，以及** $\|A\| \leqslant M$.

在下面应用这一引理时，我们有 $\mathrm{d}v(Z)=|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z$，$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 的一个开子集.

证 由于 $\mathrm{d}v$ 是 σ-有限的，Ω 是可数多个满足 $v(K)<+\infty$ 的集合 K 的并. 此外，$Y\to\|A_Y\|$ 是处处有限的. 因此 $\sup\limits_K \|A_Y\|<+\infty$，对于这样的 K 我们令

$$T_{K,\theta}=\int_{K\times K} A_Y^* A_Z \theta(Y,Z)\mathrm{d}v(Y)\mathrm{d}v(Z),$$

θ 是一个满足 $|\theta|\leqslant 1$ 的可测函数.

根据 Hilbert 空间上的算子的范数的定义，有 $\|T_{K,\theta}\|^{2m}=\|(T_{K,\theta}^* \circ T_{K,\theta})^m\|$，因此

$$\begin{aligned}\|T_{K,\theta}\|^{2m} = &\Big\|\iint_{K^{4m}} A_{Z_1}^* A_{Y_1} A_{Y_1'}^* A_{Z_1'} \cdots A_{Z_m}^* A_{Y_m} A_{Y_m'}^* A_{Z_m'} \\ &\cdot \bar\theta(Y_1,Z_1)\theta(Y_1',Z_1')\cdots\bar\theta(Y_m,Z_m) \\ &\cdot \theta(Y_m',Z_m')\mathrm{d}v(Z_1)\cdots\mathrm{d}v(Z_m')\Big\| \\ \leqslant &\iint_{K^{4m}} \min\{\|A_{Z_1}^* A_{Y_1}\bar\theta(Y_1,Z_1)\| \\ &\cdot \|A_{Y_1'}^* A_{Z_1'}\theta(Y_1',Z_1')\|\cdots\|A_{Z_m}^* A_{Y_m}\bar\theta(Y_m,Z_m)\| \\ &\cdot \|A_{Y_m'}^* A_{Z_m'}\theta(Y_m',Z_m')\|;\ \|A_{Z_1}^*\bar\theta(Y_1,Z_1)\| \\ &\cdot \|A_{Y_1} A_{Y_1'}^*\theta(Y_1',Z_1')\|\cdots\|A_{Y_m} A_{Y_m'}^*\theta(Y_m',Z_m')\| \\ &\cdot \|A_{Z_m'}\|\}\mathrm{d}v(Z_1)\cdots\mathrm{d}v(Z_m'),\end{aligned}$$

取其几何中值，即 $\min\{a,b\}\leqslant a^{1/2}b^{1/2}(a,b>0)$，则有

$$\begin{aligned}\|T_{K,\theta}\|^{2m} \leqslant &\int_{K^{4m}} \|A_{Z_1}^*\|^{1/2}\|A_{Z_m'}\|^{1/2}\|A_{Z_1}^* A_{Y_1}\|^{1/2} \\ &\cdot \|A_{Y_1}A_{Y_1'}^*\|^{1/2}\cdots\|A_{Y_m}A_{Y_m'}^*\|^{1/2} \\ &\cdot \|A_{Y_m'}^* A_{Z_m'}\|^{1/2}\mathrm{d}v(Z_1)\cdots\mathrm{d}v(Z_m').\end{aligned}$$

利用条件(5.4.7)′，我们就证明了

$$\|T_{K,\theta}\|^{2m} \leqslant M^{4m-1} v(K)(\sup_{Y\in K}\|A_Y\|).$$

两边同时开方 $2m$ 次，并且令 $m\to+\infty$ 就得到了

$$\|T_{K,\theta}\| \leqslant M^2.$$

现在设 $u_0\in H$ 和 $\theta(Y,Z)$ 满足 $|\theta(Y,Z)|=1$，以及

$$(A_Z u_0, A_Y u_0)_H \theta(Y,Z)=|(A_Y u_0, A_Y u_0)|.$$

则有

$$(T_{K,\theta} u, u_0)_H = \iint_{K\times K}(A_Z u_0, A_Y u_0)\theta(Y,Z)\mathrm{d}v(Y)\mathrm{d}v(Z).$$

因此

$$\iint_{K\times K}|(A_Y u_0, A_Z u_0)|\mathrm{d}v(Y)\mathrm{d}v(Z) \leqslant M^2\|u_0\|_H^2.$$

由于 K 是任意的，这就证明了(5.4.8)′.

当 $a\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 时，关于 a^w 的 $\mathscr{L}(L^2)$ 范数有下面的估计.

引理 5.4.4 **假设 a 是一个 g-软禁于 g-球 U（半径 $\leqslant 1$）上的象征，则存在常数 c_n, d_n（仅依赖于空间维数 n），使得**

$$\|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant c_n \|a\|_{2n+1}^{g,U}, \quad (5.4.9)$$

$$\|a\|_{0,0} = \|a\|_{L^2} \leqslant \|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)} + d_n\lambda^{-1}\|a\|_{2,0}^{g,U}, \quad (5.4.10)$$

其中 $\lambda=\inf\limits_T(g^\sigma(T)/g(T))^{1/2}$，$\|a\|_p$ **以及** $\|a\|_{p,l}$ **是在 5.2 节中定义的范数.**

为了证明这一引理，我们首先研究仿射辛变换. 称映射 χ: $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ 是一个仿射辛变换，若它是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个仿射变换，以及满足 $\chi^*\sigma=\sigma$，这里 σ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的辛变换. 我们立即有

引理 5.4.5 **任意一个仿射辛变换一定是下列 4 种映射的复合：**

1) **平移：** $X\to X+X$;
2) **将** (x,ξ) **中的** (x_j,ξ_j) **换成** $(\xi_j,-x_j)$，**其余分量不变；**
3) **映射：** $(x,\xi)\to(Tx,{}^tT^{-1}\xi)$，$T$ **是** $\mathbf{R}^n$ **上的一个线性同构；**
4) **映射：** $(x,\xi)=(x,\xi-Ax)$，A **是一个** n **维对称矩阵.**

引理 5.4.6 假设 χ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的任意一个仿射辛变换. 则存在一个 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉变换 U, 除了模 1 的常数因子外 U 是唯一确定的, 使得对 $\mathbf{R}^{2n}$ 的任意一个线性函数 L, 有

$$U^{-1}L(x,D)U = (L\circ\chi)(x,D); \qquad (5.4.11)$$

同时 U 也是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上以及 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 上的自同构; 而且任给 $a\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 有

$$U^{-1}a^wU = (a\circ\chi)^w. \qquad (5.4.12)$$

以上两引理的证明见[Hö2]的引理 18.5.8.

引理 5.4.4 之证明 我们知道, 经过一个线性辛变换(见[Hö2]的引理 18.6.4), 可以将度量 g 变换成满足条件 $g\leqslant\lambda^{-1}\Gamma_0$ 的度量, 其中 Γ_0 为 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的欧氏度量. 而由前面的引理有 $(a\circ\chi)^w=U^{-1}a^wU$. 现在考虑相应于 $Z=(z,\zeta)$ 的平移变换的酉算子, 它是

$$\tau_Z u(x) = u(x-z)\exp\mathrm{i}\left(\frac{x-z}{2},\zeta\right).$$

因此有 $U^{-1}=U^*$ 以及

$$(a^w\tau_Z u,\tau_Z u) = (\tau_Z^* a^w\tau_Z u,u) = ((a(\cdot - Z))^w u,u).$$

再取 $u_0(x)=2^{n/4}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$, 则由定义有

$$\begin{aligned}(a^w\tau_Z u_0,\tau_Z u_0) &= \iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}a\left(\frac{x+y}{2}-z,\xi-\zeta\right)u_0(y)u_0(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\ &= \iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}a\left(\frac{x+y}{2}-z,\xi-\zeta\right)2^{n/2}\mathrm{e}^{-\pi(|x|^2+|y|^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

令 $x'=(x+y)/2$, 则有

$$\begin{aligned}(a^w\tau_Z u,\tau_Z u_0) &= \iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 2x'-2y,\xi\rangle}a(x'-z,\xi-\zeta)\\ &\quad\cdot 2^{n/2}\mathrm{e}^{-\pi(|2x'-y|^2+|y|^2)}2^n\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\ &= 2^n\iint a(x'-z,\xi-\zeta)\mathrm{e}^{-2\pi(|x'|^2+|\xi|^2)}\mathrm{d}x'\mathrm{d}\xi\\ &= 2^n\int a(X-Z)\mathrm{e}^{-2\pi|X|^2}\mathrm{d}X\\ &= (a*\Psi)(Z),\end{aligned}$$

这里 $\Psi(Y)=2^n\mathrm{e}^{-2\pi|Y|^2}$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2\pi|x|^2}\mathrm{d}x=0$, 有

$$(a*\Psi)(Z)=a(-Z)+2^n\iint_0^1(1-\theta)a''(-Z+\theta X)X^2\mathrm{e}^{-2\pi|X|^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\|a\|_{L^\infty}\leqslant\|a*\Psi\|_{L^\infty}+d_n\sup_{|Y|=1}|g(Y)|\,\|a\|_{2,0},$$

这里 $d_n=2^n\int|Y|^2\mathrm{e}^{-2\pi|Y|^2}\mathrm{d}Y$. 因此利用 $g(Y)\leqslant\lambda^{-1}|Y|^2$ 我们就证明了(5.4.10), 其中用到了

$$\begin{aligned}\|a*\Psi\|_{L^\infty} &= \|(a^w\tau_Z u_0,\tau_Z u_0)\|_{L^\infty}\\ &\leqslant \|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}(\sup_{Z\in\mathbf{R}^{2n}}\|\tau_Z u_0\|_{L^2}^2)\\ &= \|a^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}.\end{aligned}$$

为证估计式(5.4.9), 我们研究 $a^w(x,D)$ 的 Schwartz 核

$$\begin{aligned}K(x,y) &= (2\pi)^{-n}\int a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int\hat{a}(\theta,y-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x+y,\theta/2\rangle}\mathrm{d}\theta. \qquad (5.4.13)\end{aligned}$$

因此

$$\int|K(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\|\hat{a}\|_{L^1(\mathbf{R}^{2n})},$$

$$\int|K(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant\|\hat{a}\|_{L^1(\mathbf{R}^{2n})}.$$

因此由 Cauchy-Schwartz 不等式, 对于 $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}\|a^wu\|_{L^2}^2 &= \|Ku\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}^n}|Ku(x)|^2\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y)u(y)\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\,|u(y)|^2\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\leqslant \|\hat{a}\|_{L^1}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\,|u(y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\leqslant \|\hat{a}\|_{L^1}^2\,\|u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\| a^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant \| \hat{a} \|_{L^1}.$$

而 $\| \hat{a} \|_{L^1} \leqslant c_n \| a \|_{2n+1}^{g,U}$ 则是显然的，因为有

$$\int g^\sigma(X-U)^{(2n+1)/2} \mathrm{d}X \leqslant c_n.$$

现在回到定理 5.4.2 的证明，为此还需要两个引理.

引理 5.4.7 任给 $0<r<r'$，r 充分的小. 假设 $\{a_Y\}$ 是一族 g-软禁于 $U_{Y,r}$ 上的一致有界的象征，m 为一允许权函数. 则映射

$$u \to \int_{V_{r'}} m(Y) \| a_Y^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y \qquad (5.4.14)$$

是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的一个半范. 特别地，$A = \int_{V_{r'}} m(Y) a_Y^w |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$ 连续地将 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 映射到 $L^2(\mathbf{R}^n)$.

证 假设 $Y_0 \in V_{r'}$，则对于固定的常值度量 g_{Y_0}，经典的象征运算给出下面的分解：$\forall \nu \in \mathbf{N}$，有

$$1 = \beta_\nu \# \gamma_\nu + r_\nu,$$

其中

$$\gamma_\nu(X) = (1 + g_{Y_0}(X - Y_0))^\nu,$$

$$\beta_\nu \in S(\gamma_\nu^{-1}, g_{Y_0}, \mathbf{R}^{2n}), \quad r_\nu \in S(\gamma_\nu^{-\infty}, g_{Y_0}, \mathbf{R}^{2n}).$$

显然 β_ν 是椭圆算子 γ_ν^w 的拟基本解的象征. 因此关于软禁于 $U_{Y,r}$ 的所有半范，我们有 $\| r_\nu \|_{p,Y_0,r} < +\infty$. 同样地，只要 ν 大于某一 $\nu(p)$ 也有 $\| \beta_\nu \|_{p,Y_0,r} < +\infty$.

利用关于双软禁半范的估计(定理 5.2.5)以及引理 5.4.4 有

$$\| a_Y^w \circ \beta_Y^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant c_n \| a_Y \# \beta_\nu \|_{2n+1,Y,r}$$

$$\leqslant c' \delta_r(Y_0, Y)^{-N} \| a_Y \|_{p,Y,r} \| \beta_\nu \|_{p,Y_0,r},$$

其中 p 仅依赖于 N. 因此对于充分大的 ν (比 N 大)，存在与 Y 无关(当然与 Y_0 有关!)的常数 C'' 使得

$$a_Y^w u = (a_Y^w \circ \beta_\nu^w) \circ \gamma_\nu^w u + a_Y^w \circ r_\nu^w u,$$

$$\| a_Y^w u \|_{L^2} \leqslant C'' \delta_r(Y_0, Y)^{-N} (\| \gamma_\nu^w u \|_{L^2} + \| u \|_{L^2}),$$

这里我们用到了 $\| a_Y \|_{p,Y,r}$ 关于 Y 是一致有界的，以及 $a_Y^w \circ r_\nu^w$ 的类

似于 $a_Y^w \circ \beta_\nu^w$ 的估计式. 由于 m 是允许权函数，存在 N_0 使得

$$\frac{m(Y)}{m(Y_0)} \leqslant C \delta_r(Y_0, Y)^{N_0}.$$

因此

$$\int_{V_{r'}} m(Y) \| a_Y^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$$

$$\leqslant C m(Y_0) \int_{V_{r'}} \delta_r(Y_0, Y)^{N_0} \| a_Y^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$$

$$\leqslant C'' m(Y_0) (\| \gamma_\nu^w u \|_{L^2} + \| u \|_{L^2})$$

$$\cdot \int_{V_{r'}} \delta_r(Y_0, Y)^{N_0 - N} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

取 N 充分大，则上式右边的积分收敛. 这时上式右边显然是 $\mathscr{S}$ 上的一个半范. 另一方面有

$$\| Au \|_{L^2} = \sup_{\| v \|_{L^2} \leqslant 1,\ v \in L^2} |(Au, v)|$$

$$\leqslant \sup_{\| v \|_{L^2} \leqslant 1,\ v \in L^2} \int_{V_{r'}} m(Y) |(a_Y^w u, v)| |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$$

$$\leqslant \int_{V_{r'}} m(Y) \| a_Y^w u \|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

因此 A 是一个从 $\mathscr{S}$ 到 L^2 的连续映射.

引理 5.4.8 任给 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个线性形式 L，存在一个允许权函数 m 使得

$$a \to m(Y)^{-1} L \# a, \text{ 及 } a \to m(Y)^{-1} a \# L \qquad (5.4.15)$$

是从 $\mathscr{S}(U_{Y,r})$ 到其自身的关于 Y 一致的连续映射. 这里 $\mathscr{S}(U_{Y,r})$ 表示软禁于 $U_{Y,r}$ 上的象征的空间.

由于 L 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的线性函数，它的二阶微分为 0，利用复合运算 # 的定义公式直接有：

$$a \# L = a \cdot L + \frac{1}{2\mathrm{i}} \{a, L\},$$

将 L 写成形式 $L(X) = \sigma(X, T_0)$，则 $L \in S(\mu, g)$，这里 $\mu = |L(X)| + g_X^\sigma(T_0)^{1/2}$ 是允许权函数. 因此取 $m = \mu$，则由 Leibniz 公式可以导出引理.

定理 5.4.2 之证明 1) 只需证明 A 是 $\mathscr{S}$ 到其自身的连续映射，$\mathscr{S}'$ 上的结果由对偶运算导出. 对于 $u\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 我们要证明：任给 $k\in\mathbf{N}$ 以及 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的线性形式 $L_1,\cdots,L_k$，有

$$\|L_1(x,D)\cdots L_k(x,D)Au\|_{L^2}\leqslant C\|u\|_{\mathscr{S}}.$$

而由定义有

$$\begin{aligned}\|L_1(x,D)\cdots L_k(x,D)Au\|_{L^2}&\leqslant\int_{V_{r'}}m(Y)\|(L_1\#\cdots L_k\#a_Y)^wu\|_{L^2}|g_Y|^{1/2}dY\\&\leqslant\int_{V_{r'}}m(Y)\mu_1(Y)\cdots\mu_k(Y)\big\|(\mu_1(Y)^{-1}L_1\#\cdots\\&\qquad\#\mu_k(Y)^{-1}L_k\#a_Y)^wu\big\|_{L^2}|g_Y|^{1/2}dY.\end{aligned}$$

利用引理 5.4.8，$\mu_j(X)=|L_k(X)|+g_X^\sigma(T_j)^{1/2}$，$j=1,2,\cdots,k$ 都是允许权函数，而且

$$\mu_1(Y)_{-1}L_1\#\cdots\#\mu_k(Y)^{-1}L_k\#a_Y=\tilde a_Y$$

一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上，因此由引理 5.4.7，

$$\int_{V_{r'}}m(Y)\mu_1(Y)\cdots\mu_k(Y)\|\tilde a_Yu\|_{L^2}|g_Y|^{1/2}dY$$

是 $\mathscr{S}$ 上的一个半范. 这就证明了 1).

2) 现在证明算子 $A=\int_{V_{r'}}a_Y^w|g_Y|^{1/2}dY$ 在 L^2 上是连续的，以及这个积分是强收敛的. 令 $dv(Y)=|g_Y|^{1/2}dY$，直接利用引理 5.4.3′只需验证条件(5.4.7)′. 由引理 5.4.4 以及双软禁估计式，有

$$\begin{aligned}&\|(a_Y^w)^*\circ a_Z^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{1/2}+\|a_Y^w\circ(a_Z^w)^*\|_{\mathscr{L}(L^2)}^{1/2}\\&\leqslant C_n(\|\bar a_Y\#a_Z\|_{2n+1,Y,r}^{1/2}+\|a_Y\#\bar a_Z\|_{2n+1,Y,r}^{1/2})\\&\leqslant C_nC(p,N)\|a_Y\|_{q,Y,r}^{1/2}\|a_Z\|_{q,Z,r}^{1/2}\delta_r(Y,Z)^{-N}\\&\leqslant C'(\sup_Y\|a_Y\|_{q,Y,r})\delta_r(Y,Z)^{-N}.\end{aligned}$$

由于 a_Y 是一致软禁于 $U_{Y,r}$ 上，有 $\sup\limits_Y\|a_Y\|_{q,Y,r}\leqslant C''$. 取 N 充分的大，上式的右边关于 Y 和 Z 的积分都是收敛的. 因此条件 (5.4.7)′

满足，这就证明了定理 5.4.2 之 2)成立. 事实上我们证明了只要权函数 m 是有界的，则 A 都是 L^2 连续的.

3) 首先，若 $A\in\mathscr{O}(m,g,\Omega)$，则显然有 $A^*\in\mathscr{O}(m,g,\Omega)$. 因此其软禁象征满足此条件. 现在设

$$A=\int_{V_{r'}}m_1(Y)a_Y^w|g_Y|^{1/2}dY\in\mathscr{O}(m_1,g,\Omega),$$

$$B=\int_{\Omega_{r'}}m_2(Z)b_Z^w|g_Z|^{1/2}dZ\in\mathscr{O}(m_2,g,\Omega)$$

是两个内算子. 利用单位分解定理，可以假设 a_Y,b_Z 的软禁半径是相同的. 于是

$$\begin{aligned}A\circ B&=\int_{V_{r'}}\int_{\Omega_{r'}}m_1(Y)m_2(Z)a_Y^w\circ b_Z^w|g_Z|^{1/2}|g_Y|^{1/2}dYdZ\\&=\int_{V_{r'}}m_1(Y)m_2(Y)\Big(\int_{\Omega_{r'}}\frac{m_2(Z)}{m_2(Y)}(a_Y\#b_Z)^w|g_Z|^{1/2}dZ\Big)|g_Y|^{1/2}dY.\end{aligned}$$

令

$$c_Y=\int_{\Omega_{r'}}\frac{m_2(Z)}{m_2(Y)}(a_Y\#b_Z)|g_Z|^{1/2}dZ.$$

若 c_Y 是一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上，则证明了

$$A\circ B\in\mathscr{O}(m_1m_2,g,\Omega).$$

利用双软禁估计

$$\|a_Y\#b_Z\|_{p,Y,r}\leqslant\|a_Y\|_{q,Y,r}\|b_Z\|_{q,Z,r}\delta_r(Y,Z)^{-N},$$

以及

$$\frac{m_2(Z)}{m_2(Y)}\leqslant C\delta_r(Z,Y)^{N_0},$$

取 N 充分大(q 也同时大)使得

$$\|c_Y\|_{p,Y,r}\leqslant C'\|a_Y\|_{q,Y,r}(\sup_Z\|b_Z\|_{q,Z,r}).$$

这就证明了定理 5.4.2 之 3).

上面的证明过程也同时给出下面的结论.

推论 5.4.9 *若 $A\in\mathscr{O}(m,g)$，$a\in\mathscr{S}(U_{Y,r})$，记 $b^w=m(Y)^{-1}a^w\circ A$，则 $b\in\mathscr{S}(U_{Y,r})$，以及 $a\to b$ 是从 $\mathscr{S}(U_{Y,r})$ 到其自身的一致连续映射.*

5.5 渐近运算

对于前一节定义的内算子，我们定义相应的象征为

$$a(X)=\int_{V_{r'}} m(Y)a_Y(X)\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y, \tag{5.5.1}$$

其中 a_Y 满足定义 5.4.1 的条件．显然，$a(X)$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的各阶导数都缓增的 C^∞ 函数．将复合运算 # 延拓到由上述象征组成的空间，则它成为一个梯级代数(graded algebra)．映射 $a\to a^w$ 成为该空间到 $\mathcal{O}(m,g,V)$ 的一个同构．但是对于这个空间，除了(5.5.1)外我们没有其他的特征化描述．另一方面，除了相差一个可以忽略的象征外，该空间与象征空间

$$S_0(m,g,V)=\{a\in S(m,g,V);\ \mathrm{supp}\,u\subset\subset V\}$$

一致．为此我们研究象征的渐近运算，刻画出可忽略的象征的类．

若 $a\in S_0(m,g,V)$，则由定义有 a^w：$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$．我们将其写成下面的形式

$$a^w=\int m(Y)\,(m(Y)^{-1}\varphi_Y a)^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y, \tag{5.5.2}$$

这里 φ_Y 是 g- 连续单位分解．因此 $a^w\in\mathcal{O}(m,g,V)$．

反之，若 $A\in\mathcal{O}(m,g,V)$，则可以定义 $\sigma(A)\in S_0(m,g,V)$．但是 $\sigma(A)$ 依赖于 A 的定义形式：

$$\sigma(A)=\int_{V_{r'}} m(Y)a_Y(X)\chi_Y(X)\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y, \tag{5.5.3}$$

这里 $\{\chi_Y\}$ 是 $S(1,g,V)$ 的一个一致有界族，$\mathrm{supp}\,\chi_Y\subset U_{Y,r'}$，以及 $\chi_Y(X)=1$，当 $X\in U_{Y,r''}$，其中 $r<r''<r'$，$U_{Y,r}$ 为 a_Y 的 g-软禁球．我们有下面的渐近运算定理．

定理 5.5.1 *假设 $a_j\in S_0(m_j,g,V)$，$j=1,2$．则有*

$$R=a_1^w\circ a_2^w-(\omega_\nu(a_1,a_2))^w\in\mathcal{O}(m_1m_2\lambda^{-\nu},g,V). \tag{5.5.4}$$

证 由于 $\omega_\nu(a_1,a_2)$ 是 $a_1\widetilde{\#}a_2$ 的前 ν 项的和，设 φ_Y 为连续单位分解，令 $a_{j,Y}=\varphi_Y a_j$，则由(5.5.2)有

$$R=\iint m_1(Y)m_2(Z)[m_1(Y)^{-1}m_2(Z)^{-1}\cdot(a_{1,Y}\#a_{2,Z}-\omega_\nu(a_{1,Y},a_{2,Z}))]^w\,|g_Y|^{1/2}|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z.$$

由于 $a_{1,Y}m_1(Y)^{-1}$，$a_{2,Z}m_2(Z)^{-1}$ 分别一致软禁于 $U_{Y,r}$ 和 $U_{Z,r}$ 上，利用命题 5.2.8 的注(5.2.27)，与定理 5.4.2 之 3)的证法相似可以得到

$$R=\int m_1(Y)m_2(Y)\lambda(Y)^{-\nu}c_Y^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y,$$

其中 c_Y 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上．这就证明了定理 5.5.1．

同定理 5.4.2 一样，我们也可以得到下面的推论．

推论 5.5.2 *假设 $a\in S_0(m,g,V)$，则映射*

$$b\to m(Y)^{-1}\lambda(Y)^{\nu}(a\#b-\omega_\nu(a,b))$$

是一个 $\mathcal{S}(U_{Y,r})$ 到其自身的关于 Y 一致连续的映射．

我们现在可以证明下面的渐近运算定理．

定理 5.5.3 *假设 $A\in\mathcal{O}(m,g,V)$．则 $\sigma(A)$ 在 $S_0(m,g,V)/S_0(m\lambda^{-\infty},g,V)$ 中的等价类仅依赖于 A，而不依赖于 A 的表达式以及 $\{\chi_Y\}$ 的选取．*

Weyl 量子化与象征映射：$A\to\sigma(A)$ 导出两个分级代数 $S_0(m,g,V)/S_0(m\lambda^{-\infty},g,V)$ 与 $\mathcal{O}(m,g,V)/\mathcal{O}(m\lambda^{-\infty},g,V)$ 之间的互为逆的同构．其中象征空间上的运算为 #，算子空间上的运算为算子的复合。．

证 首先证明：若 $A\in\mathcal{O}(m,g,V)$，则 $A-\sigma(A)^w\in\mathcal{O}(m\lambda^{-\infty},g,V)$．由定义有

$$\sigma(A)^w=\int_{V_{r'}} m(Y)(\chi_Y a_Y)^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y.$$

因此

$$A-\sigma(A)^w=\int_{V_{r'}} m(Y)(a_Y-\chi_Y a_Y)^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y.$$

我们必须证明对于任意的整数 N，$\lambda^N(Y)(a_Y-\chi_Y a_Y)$ 关于 Y 是一个一致有界的软禁族．首先，当 $X\in U_{Y,r''}$ 时，$(1-\chi_Y)(X)=0$ 以及 $\{\chi_Y\}$ 是 $S(1,g,V)$ 的一致有界族，因此

$$\| a_Y(1-\chi_Y) \|_{k,l}^{g_Y,U_{Y,r}}$$

$$= \sup_{\substack{X,T_1,\cdots,T_{k'},\\ k'\leqslant k,\\ g_Y(T_j)\leqslant 1}} \{ |\langle [(1-\chi_Y)a_Y]^{(k')}(X);\ T_1\otimes\cdots\otimes T_{k'}\rangle |$$

$$\cdot [1+g_Y^\sigma(X-U_{Y,r})]^{l/2} \}$$

$$\leqslant C_k \sup_{\substack{X\notin U_{Y,r''},\\ T_1,\cdots,T_{k'},\\ g_Y(T_j)\leqslant 1}} \{ |\langle a_Y^{(k')}(X);\ T_1\otimes\cdots\otimes T_{k'}\rangle |$$

$$\cdot [1+g_Y^\sigma(X-U_{Y,r})]^{(l+N)/2-N/2} \}$$

$$\leqslant C_k \| a_Y \|_{k,l+N}^{g_Y,U_{Y,r'}} (1+\sup_{X\notin U_{Y,r''}} g_Y^\sigma(X-U_{Y,r}))^{-N/2}$$

$$\leqslant C_k \| a_Y \|_{k,l+N}^{g_Y,U_{Y,r'}} [1+\lambda(Y)^2(r''-r)^2]^{-N/2}$$

$$\leqslant C(k,r'',r,N)\lambda(Y)^{-N} \| a_Y \|_{k,l+N}^{g_Y,U_{Y,r'}}.$$

由于 a_Y 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上，因此 $\lambda^N(Y)(1-\chi_Y)a_Y$ 也一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上.

现在只需证明若 $a\in S_0(m,g,V)$，$a^w\in\mathscr{O}(m\lambda^{-\infty},g,V)$，则有 $a\in S_0(m\lambda^{-\infty},g,V)$. 也就是要证明：对任意的 k,N，存在 C_k 使得对于所有的 $X\in V$，$T_1,\cdots,T_k\in\mathbf{R}^{2n}$ 有

$$|\langle a^{(k)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|\leqslant C_k m(X)\lambda^{-N}(X)\prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}.$$

利用推论 5.4.9，由于 $a^w\in\mathscr{O}(m\lambda^{-N},g,V)$以及 $\{\chi_Z\}$一致地软禁于 $U_{Z,r'}$上，有 $\lambda^N(Z)m(Z)^{-1}(a\#\chi_Z)$也一致地软禁于 $U_{Z,r'}$上. 另一方面 $a\in S_0(m,g,V)$，由推论 5.5.3 有 $\lambda^N(Z)m(Z)^{-1}(a\#\chi_Z-\omega_N(a,\chi_Z))$ 也是一致地软禁于 $U_{Z,r'}$上的. 而当 $X\in U_{Z,r}$时，$\omega_N(a,\chi_Z)(X)=a(X)$. 因此对任意的 k，存在 C_k 与 Z 无关使得

$$\sup_{\substack{X\in U_{Z,r},\\ T_1,\cdots,T_k\in\mathbf{R}^{2n},\\ g_Z(T_j)\leqslant 1}} |\langle \lambda^N(Z)m(Z)^{-1}(a\#\chi_Z-a)^{(k)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|$$

$$\leqslant \| \lambda^N(Z)m(Z)^{-1}(a\#\chi_Z-\omega_N(a,\chi_Z)) \|_{k,0}^{g_Z,U_{Z,r'}}$$

$$\leqslant C_k.$$

所以

$$\lambda^N(Z)m(Z)^{-1}|\langle a^{(k)}(X),T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|$$

$$\leqslant C_k + \| \lambda^N(Z)m(Z)^{-1}(a\#\chi_Z) \|_{k,0}^{g_Z,U_{Y,r''}}.$$

这就证明了对任意的 $X\in U_{Z,r}$，有

$$|\langle a^{(k)},T_1\otimes\cdots\otimes T_k\rangle|\leqslant \tilde{C}_k\lambda^{-N}(Z)m(Z).$$

因此 $a\in S_0(m\lambda^{-\infty},g,V)$.

由于有时 V 是 $\mathbf{R}^{2n}$的真子集，因此常系数微分算子(比如恒等算子)不是内算子. 但是它们与内算子的复合还是一个内算子. 为此我们研究象征类 $S_{loc}(m,g,V)=\{a\in C^\infty(V);$ 任给 $V'\subset\subset V$，存在 $b\in S(m,g,V)$使得在 V' 上 $a\equiv b\}$.

定义 5.5.4 称 $A\in\mathscr{O}_{ext}(m,g,V)$（外算子空间），若 A：$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，以及 A：$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$是连续的，同时任给 $b\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$，存在 $b_1,b_2\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$使得

$$A\circ b^w = b_1^w,\quad b^w\circ A = b_2^w;$$

$$\| b_j \|_{p,Y,r}\leqslant Km(Y)\| b \|_{q,Y,r},\quad j=1,2.$$

这里 p 是任意的，$q=q(p)$，$K=K(p,r,V')$与 Y 无关（当 $Y\in V'\subset V_{r'}$，$r'>r$ 时）.

由定义立即可知所有外算子也形成一个梯级代数，其运算为算子的复合∘，而内算子形成它的一个梯级理想. 当集合 V 变小时，空间 $\mathscr{O}_{ext}(m,g,V)$变大. 事实上，当 $A\in\mathscr{O}_{ext}(m_1,g,V)$，$B\in\mathscr{O}_{ext}(m_2,g,V)$时，$A\circ B,B\circ A$ 在 $\mathscr{S}$以及 $\mathscr{S}'$上是连续的. 而存在 $b_1,b_2\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$使得

$$A\circ B\circ b^w = A\circ(B\circ b^w) = A\circ b_1^w = b_2^w,$$

以及

$$\| b_2 \|_{p,Y,r}\leqslant K_1m_1(Y)\| b_1 \|_{q_1,Y,r}$$

$$\leqslant K_1K_2m_1(Y)m_2(Y)\| b \|_{q_2,Y,r}.$$

定理 5.5.5 存在唯一一代数单射 σ：$\mathscr{O}_{ext}(m,g,V)/\mathscr{O}_{ext}(m\lambda^{-\infty},g,V)\to S_{loc}(m,g,V)/S_{loc}(m\lambda^{-\infty},g,V)$，而且 σ 是内算子象征映射的拓展.

证 设 $B\in\mathscr{O}_{ext}(m,g,V)$. $\forall V'\subset\subset V$，取 $\chi_{V'}\in S_0(m,g,V)$，使

得当 $X\in V'$ 时 $\chi_{V'}(X)\equiv 1$. 则

$$B\circ\chi_{V'}^{w}=\int_{V'}m(Y)\left(\frac{B\circ(\varphi_Y\chi_{V'})^w}{m(Y)}\right)|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$

是一个内算子. 这是因为 $B\circ(\varphi_Y\chi_{V'})^w=b_Y^w$，以及 $\{m(Y)b_Y\}$ 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上. 因此由内算子的象征(渐近)运算，$\sigma(S\circ\chi_{V'}^w)$ 在 V' 上的限制形成一个滤子族，这个族就定义了 $S_{\mathrm{loc}}(m,g,V)/S_{\mathrm{loc}}(m\lambda^{-\infty},g,V)$ 中唯一的一个元.

另外，当 $V=\mathbf{R}^{2n}$ 时我们有

$$\mathrm{Op}(S(m,g))=\mathscr{O}(m,g,\mathbf{R}^{2n})=\mathscr{O}_{\mathrm{ext}}(m,g,\mathbf{R}^{2n}).$$

为此只需证明

$$\mathscr{O}_{\mathrm{ext}}(m,g,\mathbf{R}^{2n})\subset\mathrm{Op}(S(m,g))=\mathscr{O}(m,g,\mathbf{R}^{2n}).$$

事实上，由于现在 $V=\mathbf{R}^{2n}$，存在一致软禁于 $\{U_{Y,r}\}$ 上的单位分解 $\{\varphi_Y\}_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$. 因此对任给 $B\in\mathscr{O}_{\mathrm{ext}}(m,g,\mathbf{R}^{2n})$ 有

$$B=\int_{\mathbf{R}^{2n}}B\circ\varphi_Y^w|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$

$$=\int_{\mathbf{R}^{2n}}m(Y)\left(\frac{B\circ\varphi_Y^w}{m(Y)}\right)|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y.$$

记 $B\circ\varphi_Y^w=b_Y^w$ 则 $\{a_Y=m(Y)^{-1}b_Y\}$ 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上. 因此

$$B=\int_{\mathbf{R}^{2n}}m(Y)a_Y^w|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y\in\mathscr{O}(m,g,\mathbf{R}^{2n}).$$

第 6 章 带权 Sobolev 空间及拟微分算子的逆

在经典的微局部分析理论中，相应于经典的拟微分算子的函数空间是 Sobolev 空间. 也就是说每一个拟微分算子都是Sobolev 空间链上的连续映射，椭圆型算子则是同构映射. 本章就是推广这一理论到非齐性空间，研究与前一章所介绍的非齐性拟微分算子相应的函数空间，即所谓带权 Sobolev 空间以及它们与拟微分算子的关系. 带权 Sobolev 空间的这些“权”形成一个梯级代数，因此这些 Sobolev 空间也是建立在这个梯级代数上的一个空间“链”. 我们将证明，在一定的条件下，若一个非齐性拟微分算子是上述相应的空间“链”上的一个同构映射，则这个拟微分算子在非齐性拟微分算子代数中可逆. 这是拟微分算子理论的一个非常重要的定理.

6.1 象征的二重单位分解

在前一章我们构造了从属于 Hörmander 度量 g 的连续单位分解(定理 5.3.2). 它对于象征的研究已经是足够了的，但是当我们研究一个算子作用于一个函数，并且考察其微局部特性时就不够了. 为此我们需要构造所谓“二重”单位分解.

我们总是假设 g 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个缓增的、缓变的和满足测不准原理 $g\leqslant g^\sigma$ 的 Hörmander 度量.

定理 6.1.1 (二重单位分解) *假设对于充分小的 r，象征族 $\{a_Y\}$ 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上. 则存在常数 C 以及象征 $b_{Y,\nu},c_{Y,\nu}\in$*

$\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$，$Y\in\mathbf{R}^{2n}$，$\nu\in\mathbf{Z}_+$，使得

$$a_Y=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{Y,\nu}\# c_{Y,\nu}. \tag{6.1.1}$$

而且 $N\in\mathbf{N}$，$\{(1+\nu)^N b_{Y,\nu}\}$，$\{(1+\nu)^N c_{Y,\nu}\}$ 对 $N\in\mathbf{N}$ 一致地软禁于 $U_{Y,Cr}$ 上.

由于定义软禁半范时，度量 g 是固定在软禁球的中心的，因此我们只需要对于常值度量 $\gamma=g_Y$ 证明定理即可. 但是最后关键的一点是要得到一个与 γ 无关的关于软禁半范的估计. 所以将定理 6.1.1 表述下面的引理加以证明.

引理 6.1.2 *存在常数 $C>1$，使得任给 $r>0$，任给正的数列 $\{M_k\}$，若 γ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上满足 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$ 的正定二次型，$a\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 对任意的 $k\in\mathbf{N}$ 满足 $\|a\|_k^{\gamma,U_{0,r}}\leqslant M_k$，则存在数列 $\{M'_{k,N};N\in\mathbf{N}\}$ 以及 $b_\nu,v_\nu\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 使得我们有*

$$a=\sum_\nu b_\nu\# c_\nu,$$

而且对于所有的 $k,N,\nu\in\mathbf{N}$ 有

$$\left.\begin{aligned}(1+\nu)^N\|b_\nu\|_k^{\gamma,U_{0,Cr}}&\leqslant M'_{k,N},\\(1+\nu)^N\|c_\nu\|_k^{\gamma,U_{0,Cr}}&\leqslant M'_{k,N}.\end{aligned}\right\} \tag{6.1.2}$$

证 根据定义有

$$a\# b(X)=\pi^{-2n}\iint e^{-2i[X-Y_1,X-Y_2]}a(Y_1)b(Y_2)\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2. \tag{6.1.3}$$

则映射 $\#:(a,b)\to a\# b$ 可以分解成

$$\#=\rho\circ V\circ\tau, \tag{6.1.4}$$

其中 $\tau(a,b)=a(Y_1)b(Y_2)$ 是一个从 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})\otimes\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 到 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})$ 的张量积映射. V 是一个 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})$ 到其自身的酉映射，定义为

$$Vf(X_1,X_2)=\pi^{-2n}\iint e^{-2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]}f(Y_1,Y_2)\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

以及 $\rho:\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})\to\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 是到对角线上的限制映射.

引理的证明思路如下：给定 $a\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$，首先构造 $g\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})$ 满足 $g(X,X)=a(X)$. 再令 $f=V^{-1}g=V^*g$. 最后将 f 分解成形式

$$f(X_1,X_2)=\sum_\nu b_\nu(X_1)c_\nu(X_2).$$

这就得到所要的结果. 当然与 γ 无关的软禁半范的控制是最重要的.

第一步 取 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$，以及在原点附近 $\varphi(t)=1$. 令

$$g(X_1,X_2)=a\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big).$$

则有下面的估计(令 $r'=2r$)：对于 $l\leqslant k$ 有

$$\begin{aligned}&|\langle g^{(l)}(X_1,X_2);T_1\otimes\cdots\otimes T_l\rangle|\\&\leqslant\overline{M}_k(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'}))^{-k/2}(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'}))^{-k/2},\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

其中 T_j 是 $\mathbf{R}^{2n}_{X_1}$ 或 $\mathbf{R}^{2n}_{X_2}$ 中满足 $\gamma(T_j)\leqslant1$ 的向量. 常数 $\overline{M}_k$ 仅依赖于 r 和 M_k.

我们仅只对于 $k=1$ 验证此式，其他情况可用归纳法得到. 当 $l=0$ 时，由软禁半范的定义有

$$\begin{aligned}\|a\|_1^{\gamma,U_r}=\sup_{T,X\in\mathbf{R}^{2n},\ \gamma(T)\leqslant1}&\{|a(X)|(1+\gamma^\sigma(X-U_r)),\\&|\langle T,a^{(1)}(X)\rangle|(1+\gamma^\sigma(X-U_{r'}))\}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|g(X_1,X_2)|&\leqslant\sup_{\gamma(X_1-X_2)\leqslant r^2}\left|a\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\right|\\&=\sup_{\gamma(X_1-X_2)\leqslant r^2}\Big\{\left|a\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\right|\Big(1+\gamma^\sigma\Big(\frac{X_1+X_2}{2}-U_r\Big)\Big)\\&\qquad\cdot\Big(1+\gamma^\sigma\Big(\frac{X_1+X_2}{2}-U_r\Big)\Big)^{-1}\Big\}\\&\leqslant M_1\sup_{\gamma(X_1-X_2)\leqslant r^2}\Big(1+\gamma^\sigma\Big(\frac{X_1+X_2}{2}-U_r\Big)\Big)^{-1}\\&=M_1\sup_{\gamma(X_1-X_2)\leqslant r^2}\Big(1+\gamma^\sigma\Big(X_1-\frac{X_1-X_2}{2}-U_r\Big)\Big)^{-1}\\&\leqslant M_1(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{2r}))^{-1}.\end{aligned}$$

用类似的方法可以证明

$$|g(X_1,X_2)|\leqslant M_1(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{2r}))^{-1}.$$

关于一阶微分有

$$\langle g^{(1)}(X_1,X_2),T\rangle=\langle a^{(1)}\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big),T\rangle + \langle a\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\varphi^{(1)}\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big),T\rangle.$$

第一项的估计与前面的完全一样，我们来研究第二项的估计：

$$\begin{aligned}\Big|\langle\varphi^{(1)}\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big),T\rangle\Big| &\leqslant \sup\varphi^{(1)}(t)\Big|\frac{\langle\gamma'(X_1-X_2),T\rangle}{r^2}\Big|\psi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big)\\ &\leqslant\psi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big)C_1\frac{\gamma(T)^{1/2}\gamma(X_1-X_2)^{1/2}}{r^2}\\ &\leqslant\frac{C_1}{r}\psi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big).\end{aligned}$$

因此也有

$$|\langle g^{(1)}(X_1,X_2),T\rangle|\leqslant\frac{C_1}{r}M_1(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{2r}))^{-1/2}\cdot(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{2r}))^{-1/2}.$$

由归纳法可以证明(6.1.5). 而且 $\overline{M}_k$ 仅依赖于 M_k, r 及 $\sup|\varphi^{(k)}(t)|$.

第二步 证明 V^* 保持估计式(6.1.5)不变. 令

$$f(X_1,X_2)=V^*g(X_1,X_2)=\pi^{-2n}\iint e^{2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]}g(Y_1,Y_2)\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

我们需要证明 f 也满足估计式(6.1.5).

首先因为 $g(X_1,X_2)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})$，由分部积分有

$$\partial_{T_j}V^*g=V^*\partial_{T_j}g.$$

因此下面只需考虑 $l=0$ 的情况. 设 $\Theta\in\mathbf{R}^{2n}$ 满足 $\gamma(\Theta)=1$ 以及

$$[\Theta,Y_1-X_1]=\gamma^\sigma(Y_1-X_1)^{1/2}.$$

对变量 Y_2 在方向 Θ 上微分，有

$$\partial_\Theta e^{2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]}=2i[\Theta,Y_1-X_1]e^{2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]}.$$

因此，令 $g^{(N)}=(1+\frac{1}{2i}\partial_\Theta)^N g$，利用分部积分有

$$f(X_1,X_2)=\pi^{-2n}\iint e^{2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]}g^{(N)}(Y_1,Y_2)\cdot(1+\gamma^\sigma(Y_1-X_1))^{-N/2}\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

利用对 $g^{(N)}$ 的估计式(6.1.5)，存在仅依赖于 $\overline{M}_N$ 的常数 C_N，使得

$$|f(X_1,X_2)|\leqslant C_N\iint(1+\gamma^\sigma(Y_1-X_1))^{-N/2}\cdot(1+\gamma^\sigma(Y_1-U_{r'}))^{-N/2}(1+\gamma^\sigma(Y_2-U_{r'}))^{-N/2}\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

由于

$$(1+\gamma^\sigma(Y_1-U_{r'}))(1+\gamma^\sigma(Y_1-X_1))\geqslant\frac{1}{4}(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'})),$$

以及 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$，取 $N=4k+2n+2$，则有

$$|f(X_1,X_2)|\leqslant C_N'(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'}))^{-2k}\cdot\iint(1+\gamma^\sigma(Y_1-X_1))^{-(n+1)}(1+\gamma(Y_2-U_{r'}))^{-(n+1)}\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}Y_2.$$

由于 $|\gamma|\cdot|\gamma^\sigma|=1$，上面的积分是一个与 γ 无关，而仅依赖于 r' 的常数.

交换 X_1,X_2 的位置，又可以得到一个关于 $(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'}))^{-2k}$ 的估计. 取几何中值得到

$$|f(X_1,X_2)|\leqslant\widetilde{M}_k(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'}))^{-k}\cdot(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'}))^{-k}. \tag{6.1.6}$$

这里 $\widetilde{M}_k$ 仅依赖于 M_k 以及 r 而与 γ 无关.

第三步 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上选定一个辛坐标使得

$$\gamma=\sum_{i=1}^n a_i^{-1}(\mathrm{d}x_i^2+\mathrm{d}\xi_i^2),$$

则 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$ 意味着 $a_i\geqslant1$, $i=1,2,\cdots,n$. 记 A: $(x_i,\xi_i)\to(x_i/a_i,\xi_i/a_i)$，则 A 是从 $\mathbf{R}_\gamma^{2n}$(赋以度量 γ)到 $\mathbf{R}_E^{2n}$(赋以欧氏度量)的等距同构. 在 $\mathbf{R}_E^{2n}$ 中记 $\widetilde{Q}_0=(-2r',2r')^{2n}$ 以及 $\Delta=(2r'\mathbf{Z})^{2n}$. 取一个 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的 C^∞

单位分解 $\sum_{\delta\in\Delta}\tilde{\varphi}(X-\delta)=1$，其中 $\mathrm{supp}\,\tilde{\varphi}\subset\tilde{Q}_0$. 令 $\tilde{\psi}\in C_0^\infty(\tilde{Q}_0)$使得当 $X\in\mathrm{supp}\,\tilde{\varphi}$ 时 $\tilde{\psi}(X)=1$. 对于 $\delta\in\Delta$，记

$$\tilde{Q}_\delta=\tilde{Q}_0+\delta,\quad \tilde{\varphi}_\delta(X)=\tilde{\varphi}(X-\delta),\quad \tilde{\psi}_\delta=\tilde{\psi}(X-\delta).$$

在 $\mathbf{R}_\gamma^{2n}$ 上，令

$$Q_\delta=A^{-1}(\tilde{Q}_\delta),\quad \varphi_\delta=\tilde{\varphi}_\delta\circ A,\quad \psi_\delta=\tilde{\psi}_\delta\circ A.$$

现在将前面给出的函数 f 分解成下面的形式：

$$f(X_1,X_2)=\sum_{\delta_1,\delta_2\in\Delta}h_{\delta_1,\delta_2}=\sum_{\delta_1,\delta_2\in\Delta}f(X_1,X_2)\varphi_{\delta_1}(X_1)\varphi_{\delta_2}(X_2).$$

设 $T_j\in\mathbf{R}^{2n}$满足 $\gamma(T_j)\leqslant 1$. 则同 f 一样，任给 $l\leqslant N$ 有

$$\|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_l}h_{\delta_1,\delta_2}\|_{L^\infty}\leqslant C_N(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_1}-Q_0))^{-N/2}\cdot(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_2}-Q_0))^{N/2}.\quad(6.1.7)$$

这里 C_N 仅依赖于 $\widetilde{M}_k$ 以及 r'，但是不依赖于 γ.

现在将函数 $h_{\delta_1,\delta_2}\in C_0^\infty(Q_{\delta_1}\times Q_{\delta_2})$先周期延拓到全空间 $\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$ 上，再展开为 Fourier 级数，最后再加以截断，有

$$h_{\delta_1,\delta_2}(X_1,X_2)=\sum_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{Z}^{2n}}p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/r'\langle\lambda_1,AX_1\rangle}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/r'\langle\lambda_2,AX_2\rangle}\psi_{\delta_1}(X_1)\psi_{\delta_1}(X_2).\quad(6.1.8)$$

根据 Fourier 系数的积分表达式，利用估计式(6.1.7)我们有

$$|p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}|\leqslant C_N'(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_1}-Q_0))^{-N/2}(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_2}-Q_0))^{-N/2}\cdot(1+|\lambda_1|)^{-N/2}(1+|\lambda_2|)^{-N/2},\quad(6.1.9)$$

其中 C_N'也与 γ 无关.

现在令

$$b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X)=p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}^{1/2}\mathrm{e}^{r\pi/r'\langle\lambda_1,AX\rangle}\psi_{\delta_1}(X),\quad(6.1.10)$$

$$c_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X)=p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}^{1/2}\mathrm{e}^{r\pi/r'\langle\lambda_2,AX\rangle}\psi_{\delta_2}(X).\quad(6.1.11)$$

将可数集 $\mathbf{Z}^{8n}$重新排序记之为 $\mathbf{N}$，则

$$f(X_1,X_2)=\sum_{\nu\in\mathbf{N}}b_\nu(X_1)c_\nu(X_2).$$

余下的就是要验证这些函数在 $U_{r'}$ 上的软禁估计.

对于 $X,X'\in Q_\delta$，$Y'\in Q_0$，存在 $Y\in 2Q_0$ 使得 $X'-Y'=X-Y$.

因此

$$\gamma^\sigma(Q_\delta-Q_0)\geqslant\gamma^\sigma(X-2Q_0)\geqslant\gamma^\sigma(X-U_{r''}),$$

其中 $r''=4\sqrt{2n}r'$. 另一方面，对于 $T\in\mathbf{R}^{2n}$，$\gamma(T)\leqslant 1$. $\partial_T\psi_\delta$ 以及(6.1.10)中的指数函数关于 T 方向的导数都可以用与 γ 无关的常数控制. 因此利用(6.1.9)以及 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$，可以得到下面的估计：

$$(1+\gamma^\sigma(X-U_{r''}))^p|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_l}b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X)|\leqslant C_{p,q}(1+\gamma(Q_{\delta_1}-Q_0))^{-q}(1+\gamma(Q_{\delta_2}-Q_0))^{-q}\cdot(1+|\lambda_1|)^{-q}(1+|\lambda_2|)^{-q},$$

其中 $l\leqslant p,\gamma(T_j)\leqslant 1$，常数 $C_{p,q}$与 γ 无关. 上式的左边正好是$b_\nu=b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}$在 U_{Cr} $(C=8\sqrt{2n})$上的软禁半范，而右边正好与$(1+|\nu|)^{-N}$同阶，这是因为通过等距同构 A 有

$$1+\gamma(Q_{\delta_1}-Q_0)=1+|\tilde{Q}_{\delta_1}-\tilde{Q}_0|\approx 1+|\delta_1|.$$

关于 c_ν 的估计是完全类似的. 这就证明了引理 6.1.2.

注 软禁球的半径有所“损失”，但是前面得到的 $C=8\sqrt{2n}$可以用任意一个大于 1 的常数 C'来替换. 因为若 a 软禁于 $U_{Y,r}$上，则利用前一章的结论存在一个 a 的有限单位分解 $a=\sum_{j=1}^N a_j$，而每一个 a_j 软禁于 $U_{Y_j',\epsilon}$上，其中 $Y_j'\in U_{Y,r}$，ϵ 充分小. 这时再应用引理 6.1.2 于 a_j，则有 $a_j=\sum b_{j,\nu}\# c_{j,\nu}$，其中 $b_{j,\nu},c_{j,\nu}$软禁于 $U_{Y_j,C\epsilon}$上. 因此取 ϵ 充分小使得$C'>r+C\epsilon$，则 $b_{j,\nu},c_{j,\nu}$都软禁于 $U_{Y,C'r}$上. 这就证明了 $a=\sum_{j=1}^N\sum_\nu b_{j,\nu}\# c_{j,\nu}$. 因此可以先给定 $C'>1$ 然后构造单位分解.

6.2 带权 Sobolev 空间

在前一章已经知道，经典的拟微分算子 $S_{1,0}^m(\mathbf{R}^n)$是由度量

$$g_{1,0}=\mathrm{d}x^2+(1+|\xi|^2)^{-1}\mathrm{d}\xi^2$$

定义的. 相应的经典 Sobolev 空间形成一个函数空间的“链”，而经典的椭圆算子是这个“链”上的一个代数的和拓扑的同构. 我们现在

要将这一结果推广到前一章的一般的拟微分算子. 为此定义相应于一个 Hörmander 度量 g 以及权函数 m 的 Sobolev 空间.

假设$\{\varphi_Y\}$是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个 g-单位分解，它们的软禁球半径为 r/C，其中常数 C 出现于定理 6.1.1 中. 设 $\varphi_Y=\sum_\nu \psi_{Y,\nu}\#\theta_{Y,\nu}$ 是由定理 6.1.1 提供的二重软禁分解.

定义 6.2.1 *假设 g 为一个 Hörmander 度量，M 为 g 的一个允许权函数. 定义相应的 Sobolev 空间为*

$$H(M,g)=\left\{u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n);\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^{2n}}M(Y)^2\,\|\theta^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}\,|g_Y|^{1/2}<+\infty\right\}. \tag{6.2.1}$$

这是一个 Hilbert 空间，其内积为

$$(u,v)_{H(M)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int M(Y)^2(\theta^w_{Y,\nu}u,\theta^w_{Y,\nu}u)_{L^2}\,|g_Y|\,\mathrm{d}Y. \tag{6.2.2}$$

在不混淆时简记为 $H(M)$.

为了说明这个定义是合适的，我们需要证明空间 $H(M)$ 与 φ_Y，$\psi_{Y,\nu}$，$\theta_{Y,\nu}$的特殊选择无关.

命题 6.2.2 *假设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则 $u\in H(M)$ 当且仅当对于所有的对任意 $k\in\mathbf{N}$ 均满足条件 $\sup\limits_Y\sum_\nu\|a_{Y,\nu}\|^2_{k,U_{Y,r}}<+\infty$ 的象征族 $\{a_{Y,\nu}\}$ 都有*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\int M(Y)^2\,\|a^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y<+\infty. \tag{6.2.3}$$

证 充分性是显然的，因为象征族$\{\theta_{Y,\nu}\}$满足所需的条件. 所以只证必要性. 首先有

$$u=\int_{\mathbf{R}^{2n}}\varphi^w_S u\,|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^{2n}}\psi^w_{S,\lambda}\circ\theta^w_{S,\lambda}u\,|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S.$$

因此

$$\|a^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}=\sum_\lambda\sum_\mu\iint(a^w_{Y,\nu}\psi^w_{S,\lambda}\theta^w_{S,\lambda}u,a^w_{Y,\nu}\psi^w_{T,\mu}\theta^w_{T,\mu}u)_{L^2}$$
$$\cdot\,|g_S|^{1/2}\,|g_T|^{1/2}\mathrm{d}S\mathrm{d}T$$

$$\leqslant\sum_\lambda\sum_\mu\iint\|\bar\psi^w_{T,\mu}\circ\bar a^w_{Y,\nu}\circ a^w_{Y,\nu}\circ\bar\psi^w_{S,\lambda}\|_{\mathscr{L}(L^2)}$$
$$\cdot\,\|\theta^w_{S,\lambda}u\|_{L^2}\,\|\theta^w_{T,\mu}u\|_{L^2}\,|g_S|^{1/2}\,|g_T|^{1/2}\mathrm{d}S\mathrm{d}T. \tag{6.2.4}$$

由引理 5.4.4 以及双软禁估计定理 5.3.4，上面的积分式中的项 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(L^2)}$ 由下式控制：

$$K\delta_r(S,Y)^{-N}\delta_r(T,Y)^{-N}(1+\lambda)^{-N}(1+\mu)^{-N}\,\|a_{Y,\nu}\|^2_{p,U_{Y,r}}, \tag{6.2.5}$$

其中 $N\in\mathbf{N}$ 是任意的，$p=p(N)$，$K=K(N)$.

因此利用 M 的缓增性有

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\int M(Y)^2\,\|a^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$
$$\leqslant\sum_\lambda\sum_\mu\iint K(S,\lambda,T,\mu)M(S)\,\|\theta^w_{S,\lambda}u\|_{L^2}$$
$$\cdot\,M(T)\,\|\theta^w_{T,\mu}u\|_{L^2}\,|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S\,|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T,$$

其中

$$K(S,\lambda,T,\mu)\leqslant C\int M(Y)^2M(S)^{-1}M(T)^{-1}\delta_r(S,Y)^{-N}$$
$$\cdot\,\delta_r(T,Y)^{-N}(1+\lambda)^{-N}(1+\mu)^{-N}$$
$$\cdot\,\|a_{Y,r}\|^2_{p,U_{Y,r}}\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y. \tag{6.2.6}$$

利用(5.4.4)以及定理 5.3.5，取 N 充分大使得

$$\left.\begin{aligned}&\sup_{S,\lambda}\sum_\mu\int K(S,\lambda,T,\mu)\,|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T<+\infty,\\&\sup_{T,\mu}\sum_\lambda\int K(S,\lambda,T,\mu)\,|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S<+\infty.\end{aligned}\right\} \tag{6.2.7}$$

因此有

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\int M(Y)^2\,\|a^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$
$$\leqslant C\sum_\lambda\int M(S)^2\,\|\theta^w_{S,\lambda}u\|^2_{L^2}\,|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S$$
$$=C\,\|u\|^2_{H(M)}<+\infty.$$

这就证明了命题 6.2.2.

注 由估计式(6.2.4)以及(6.2.5)还可以导出下面的估计:

$$M(Y)^2\|a^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}\leqslant C\sum_\lambda\sum_\mu\iint\delta_r(S,Y)^{-N}\delta_r(T,Y)^{-N}(1+\lambda)^{-N}\cdot(1+\mu)^{-N}M(S)\|\theta^w_{S,\lambda}u\|_{L^2}M(T)\cdot\|\theta^w_{T,\mu}u\|_{L^2}|g_S|^{1/2}|g_T|^{1/2}\mathrm{d}S\mathrm{d}T.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$M(Y)\|a^w_Y u\|_{L^2}\leqslant C\|u\|_{H(M)}.$$

这就证明了:对于任意一个一致软禁的族 $a_{Y,\nu}$ 有 $a^w_{Y,\nu}$: $H(M)\to L^2$. 而且算子范数由 $CM(Y)^{-1}$ 控制.

推论 6.2.3 *假设 M,M_1 是 g 的两个允许权函数,则任给 $a\in S(M,g)$ 有 a^w: $H(M_1)\to H(M_1/M)$ 是一个连续映射.*

证 就是要证明存在常数 C 使得

$$\sum_\nu\int M_1(Y)^2M(Y)^{-2}\|\theta^w_{Y,\nu}\circ a^w u\|^2_{L^2}|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y\leqslant C\|u\|^2_{H(M_1)}. \tag{6.2.8}$$

由前一章的结论,$b\to M(Y)^{-1}b\# a$ 是一个 $\mathscr{S}(U_{Y,r})$ 到其自身的连续映射,其半范与 Y 无关. 因此 $b_{Y,\nu}=M(Y)^{-1}\theta_{Y,\nu}\# a$ 满足命题 6.2.2 中的(6.2.3). 这样(6.2.8)可以由命题 6.2.2 给出.

定理 6.2.4 *空间 $H(1)$ 恒等于 $L^2(\mathbf{R}^n)$.*

证 记 $a=\sum_\nu\int\bar\theta_{Y,\nu}\#\theta_{Y,\nu}|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$, 则 $a\in S(1,g)$. 因此 a^w 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上是有界的. 若 $u\in L^2$, 则有

$$\|u\|^2_{H(1)}=(a^w u,u)_{L^2}\leqslant C\|u\|^2_{L^2}.$$

反过来,若 $u\in H(1)$, 则

$$\|u\|^2_{L^2}=\sum_\lambda\sum_\mu\iint(\bar\varphi^w_{T,\mu}\circ\varphi^w_{S,\lambda}\circ\theta^w_{S,\lambda}u,\theta^w_{T,\mu}u)|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T.$$

因此令 $K(S,\lambda,T,\mu)=\|\bar\varphi^w_{T,\mu}\circ\varphi^w_{S,\lambda}\|_{\mathscr{L}(L^2)}$. 则有

$$\|u\|^2_{L^2}\leqslant\sum_\lambda\sum_\mu\iint K(S,\lambda,T,\mu)\|\theta^w_{T,\mu}u\|_{L^2}\ \|\theta^w_{S,\lambda}u\|_{L^2}\cdot|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T.$$

现在类似于命题 6.2.2 就可以证明定理 6.2.4.

6.3 拟微分算子的特征化

现在研究一个线性算子在什么条件是一个拟微分算子,即拟微分算子的特征化问题. 假设 γ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个常值度量,满足 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$.

定义 6.3.1 *称算子 $A\in\mathrm{Op}(S(1,\gamma))$, 若 A: $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, 且任给 $k\in\mathbf{N}$, 任给 $T_j\in\mathbf{R}^{2n}$, $\gamma(T_j)\leqslant 1$, $0\leqslant j\leqslant k$ 有*

$$\|A\|_{k,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))}=\sup_{p\leqslant k}\|(\mathrm{ad}\,L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\,L_p)\circ A\|_{\mathscr{L}(L^2)}<+\infty, \tag{6.3.1}$$

其中 $L_j=\sigma(T_j,\cdot)^w$, 以及 $\mathrm{ad}\,L\circ A=[L,A]$.

由于 $\mathrm{ad}\,L_j\circ a^w=(\partial_{T_j}a)^w$, 若 $a\in S(1,\gamma)$, 立即有 $a^w\in\mathrm{Op}(S(1,\gamma))$. 并且 a^w 的半范可以由 a 的半范控制. 反过来的情况是下面的引理.

引理 6.3.2 1) *$A\in\mathrm{Op}(S(1,\gamma))\Leftrightarrow A=a^w$ 其中 $a\in S(1,\gamma)$. 另外,任给 $k\in\mathbf{N}$, 存在 C,l 与 γ 无关使得*

$$\|a\|_{k,S(1,\gamma)}\leqslant C\|a^w\|_{l,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))}. \tag{6.3.2}$$

2) *任给 $k\in\mathbf{N}$, $\theta\in(0,1)$, 存在 C,l 与 γ 无关使得*

$$\|a\|_{k,S(1,\gamma)}\leqslant C\|A\|^\theta_{\mathscr{L}(L^2)}\|A\|^{1-\theta}_{l,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))}. \tag{6.3.3}$$

证 首先,若 χ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的一个线性辛变换(见[Hö2]定理 18.5.9),则存在 L^2 上的一个酉变换 U 使得 $(a\circ\chi)^w=U^{-1}a^wU$, 而引理的结论是辛不变的. 现在我们可以假设

$$\gamma=\sum_{j=1}^n\frac{\mathrm{d}x_j^2+\mathrm{d}\xi_j^2}{a_j^2}.$$

因此假设 $\gamma\leqslant\gamma^\sigma$ 等价于 $a_j\geqslant 1$. 记 γ 在 $\mathbf{R}^n_x$ 上的分量为

$$\gamma_1=\sum_{j=1}^n a_j^{-2}\mathrm{d}x_j^2.$$

我们的基本思路是由算子 A 定义一个“象征核”$b(x,y,\eta)$, 再由这

个象征核导出 A 的 Weyl 运算的象征 $a(x,\xi)$. 选定一个函数 $\alpha\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$满足 $\alpha(0)=1$, 对于 $Y=(y,\eta)$定义

$$e_\eta(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\eta};\quad \Pi_Y(x)=e_\eta(x)\alpha(\gamma_1(x-y)).$$

对于 $u\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, 立即有

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\eta}u(y)\Pi_Y(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta.$$

因此有

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\eta}u(y)A(\Pi_Y(x))\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta,$$

即

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\eta}b(x,y,\eta)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta,\quad (6.3.4)$$

其中

$$b(x,Y)=e_{-\eta}(x)A(\Pi_Y)(x).\quad (6.3.5)$$

下面研究"象征核"b 的微分的估计，记

$$\mathrm{D}_{x_j}=-\mathrm{i}a_j\frac{\partial}{\partial x_j}.\quad (6.3.6)$$

这是由象征 $a_j\xi_j$ 定义的算子，而记 M_j 为由象征 a_jx_j 定义的乘子. 现在这些算子就可以起到定义 6.3.1 中的算子 L_j 的作用.

对于 $s\in\mathbf{N}$ 称一个函数 $u\in\mathscr{H}^s(\gamma_1)$, 若有

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}^s(\gamma_1)}=\sup_{|\lambda|\leqslant s}\left|\int \mathrm{D}_x^\lambda u(x)\right|^2|\gamma_1|^{1/2}\mathrm{d}x<+\infty.\quad (6.3.7)$$

于是映射 $x_j\to x_j/a_j$ 给出一个从 $\mathscr{H}^s(\gamma_1)$到 $H^s(\mathbf{R}^n)$的等距同构. 因此由经典的 Sobolev 引理, 存在与 γ_1 无关的常数 $C_{k,s}$使得当 $s>k+n/2$ 时有

$$\sup_{|\lambda|\leqslant k}\|\mathrm{D}_x^\lambda u\|_{L^\infty}\leqslant C_{k,s}\|u\|_{\mathscr{H}^s(\gamma_1)}.\quad (6.3.8)$$

对于一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 u, 有下面的恒等式

$$\mathrm{D}_{x_j}(e_{-\eta}A(e_\eta u))=e_{-\eta}[\mathrm{D}_{x_j},A](e_\eta u)+e_{-\eta}A(e_\eta \mathrm{D}_{x_j}u),\quad (6.3.9)$$

$$\mathrm{D}_{\eta_j}(e_{-\eta}A(e_\eta u))=e_{-\eta}[M_{x_j},A](e_\eta u).\quad (6.3.10)$$

应用上式于函数 $b(x,y,\eta)$, 则有

$$\mathrm{D}_x^\lambda\mathrm{D}_y^\mu\mathrm{D}_\eta^\nu b(x,y,\eta)=\sum_{\lambda'\leqslant\lambda}\binom{\lambda}{\lambda'}e_{-\eta}(x)(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}_x)^{\lambda'}(\mathrm{ad}\,M_x)^\nu$$
$$\cdot A(e_\eta\mathrm{D}_x^{\lambda-\lambda'}\mathrm{D}_y^\mu(\alpha(\gamma_1(\cdot-y)))) (x),\quad (6.3.11)$$

其中函数 $\mathrm{D}_x^{\lambda-\lambda'}\mathrm{D}_y^\mu(\alpha(\gamma_1(\cdot-y)))$可以写成形式 $\psi(\cdots,(x_j-y_j)/a_j,\cdots)$, ψ 是一个依赖于指标 λ,λ',μ 但是与 γ 无关的函数. 因此它们在 $\mathscr{H}^0(\gamma_1)$中的范数与 γ_1 无关. 由于一个算子在 $\mathscr{L}(L^2)$中的范数等于它在 $\mathscr{L}(\mathscr{H}^0(\gamma_1))$中的范数, 有

$$\|\mathrm{D}_y^\mu\mathrm{D}_\eta^\nu b(\cdot,y,\eta)\|_{\mathscr{H}^s(\gamma_1)}\leqslant C_{\mu,\nu,s}\|A\|_{\mu+s,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))},\quad (6.3.12)$$

其中 $C_{\mu,\nu,s}$与 γ 无关. 利用插值不等式

$$\|u\|_{\mathscr{H}^s(\gamma_1)}\leqslant\|u\|^\theta_{\mathscr{L}(L^2)}\|u\|^{1-\theta}_{\mathscr{H}^{s/(1-\theta)}(\gamma_1)},$$

则(6.3.12)的右边可以用 $C\|A\|^\theta_{\mathscr{L}(L^2)}\|A\|^{1-\theta}_{l,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))}$估计, 其中 C 和 l 仅与 μ,ν,s,θ 有关.

最后由 Sobolev 不等式就导出了: $\forall k$, $\forall\theta\in(0,1)$, $\exists C$, $\exists l$, $\forall\gamma$, 有

$$\sup_{|\lambda|+|\mu|+|\nu|\leqslant k}\|\mathrm{D}_x^\lambda\mathrm{D}_y^\mu\mathrm{D}_\eta^\nu b(x,y,\eta)\|_{L^\infty}$$
$$\leqslant C\|A\|^\theta_{\mathscr{L}(L^2)}\|A\|^{1-\theta}_{l,\mathrm{Op}(S(1,\gamma))}.\quad (6.3.13)$$

现在令

$$a(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot(\zeta-\xi)}c(x,z,\zeta)\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta,\quad (6.3.14)$$

其中

$$c(x,z,\zeta)=b\left(\frac{x+z}{2},\frac{x-z}{2},\zeta\right).\quad (6.3.15)$$

则 $A=a^w$. 由分部积分公式有

$$\mathrm{D}_x^\lambda\mathrm{D}_\xi^\mu a(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot(\zeta-\xi)}\mathrm{D}_x^\lambda\mathrm{D}_\zeta^\mu c(x,z,\zeta)\mathrm{d}z\mathrm{d}\zeta.\quad (6.3.16)$$

令 $L=1-\Delta_z-\Delta_\zeta$, 则有

$$L(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot(\zeta-\xi)})=(1+|z|^2+|\zeta-\xi|^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot(\zeta-\xi)},\quad (6.3.17)$$

由(6.3.16)有

$$D_x^\lambda D_\xi^\mu a(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\iint e^{iz\cdot(\zeta-\xi)}[(1+|z|^2+|\zeta-\xi|^2)^{-1}L]^{m+1}$$
$$\cdot D_x^\lambda D_\zeta^\mu c(x,z,\zeta)\,dz d\zeta. \quad (6.3.18)$$

现在将算子 L 中的∂_{z_j}换成 $i(a_j)^{-1}D_{z_j}$，∂_{ξ_j}换成 $i(a_j)^{-1}D_{\zeta_j}$. 另一方面 $c(x,z,\zeta)$的微分由(6.3.13)来控制，则最后可以得到下面的估计：$\forall k$，$\forall \theta\in(0,1)$；$\exists C>0$，$\exists l$，使得$\forall\gamma$有

$$\sup_{|\lambda|+|\mu|\leqslant k}\| D_x^\lambda D_\xi^\mu a(x,\xi)\|_{L^\infty}\leqslant C\|A\|_{\mathscr{L}(L^2)}^\theta \|A\|_{l,\gamma}^{1-\theta},$$

这就证明了引理 6.3.2.

现在回到 Hörmander 度量 g 的情况，假设 M 是 g 的一个允许权函数.

定理 6.3.3 1) *设 A: $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$是一个线性算子. 则 $A=a^w$，$a\in S(M,g)$，当且仅当对于任意一个软禁于$\{U_{Y,r}\}$上的象征族$\{b_Y\}$，有*

$$M(Y)^{-1}\|(\mathrm{ad}\,L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\,L_p)\cdot(b_Y^w\circ A)\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C_k,$$
$$p\leqslant k, \quad (6.3.19)$$

其中 C_k 与 Y 无关，$L_j=\sigma(T_j,\cdot)^w$，$g_Y(T_j)\leqslant 1$，$j=1,2,\cdots,p$.

2) *令*

$$\|A\|_{k,\mathrm{Op}(S(M,g))}=\sup_{|J|\leqslant k,\,Y,\nu} M(Y)^{-1}\left\|\prod_{j\in J}(\mathrm{ad}\,L_j)\cdot(\theta_{Y,\nu}^w\circ A)\right\|_{\mathscr{L}(L^2)}, \quad (6.3.20)$$

则 $A=a^w$，$a\in S(M,g)$，当且仅当 $\|A\|_{k,\mathrm{Op}(S(M,g))}\leqslant C_k$. 而且有下面的关系：对任给的 k，存在 C 与 l，使得

$$\|a\|_{k,S(M,g)}\leqslant C\|a^w\|_{l,\mathrm{Op}(S(M,g))}, \quad (6.3.21)$$

以及$\forall k$，$\forall\theta\in(0,1)$，$\exists C$，$\exists l$，使得

$$\|a\|_{k,S(M,g)}\leqslant C\|a^w\|_{0,\mathrm{Op}(S(M,g))}^\theta\|a^w\|_{l,\mathrm{Op}(S(M,g))}^{1-\theta}. \quad (6.3.22)$$

证 显然只需证明 2)，由引理 6.3.2，当 Y 固定时对于常值度量 g_Y，令

$$b_{Y,\nu}^w = M(Y)^{-1}\theta_{Y,\nu}^w\circ A,$$

则有：$\forall k$，$\forall\theta\in(0,1)$，$\exists C$，$\exists l$，使得$\forall Y$，$\forall\nu$有

$$\|b_{Y,\nu}\|_{k,S(1,g_Y)}\leqslant C\|A\|_{0,\mathrm{Op}(S(M,g))}^\theta\|A\|_{l,\mathrm{Op}(S(M,g))}^{1-\theta}. \quad (6.3.23)$$

现在令 $c_{Y,\nu}=(1+\nu)^N\psi_{Y,\nu}\# b_{Y,\nu}$，由于$(1+\nu)^N\psi_{Y,\nu}$一致地软禁于 $U_{Y,r}$上. 利用双软禁估计，$\forall k$，$\exists C$，$\exists l$，使得$\forall Y$，$\forall\nu$，有

$$\|c_{Y,\nu}\|_{k,Y,r}\leqslant\tilde{C}\|(1+\nu)^2\psi_{Y,\nu}\|_{l,Y,r}\|b_{Y,\nu}\|_{l,Y,r}$$
$$\leqslant C\|b_{Y,\nu}\|_{l,Y,r}.$$

因此 $c_{Y,\nu}$一致地软禁于 $U_{Y,r}$上，令

$$a=\sum_\nu(1+\nu)^{-N}\int M(Y)c_{Y,\nu}|g_Y|^{1/2}dY$$
$$=\int M(Y)\tilde{c}_Y|g_Y|^{1/2}dY.$$

则 $a\in S(M,g)$以及 $A=a^w$. 而估计式(6.3.22)由(3.3.23)直接导出. 这就证明了定理.

利用这个定理，要证明一个线性算子 A: $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$是一个拟微分算子，即：$\exists a\in S(M,g)$，使得 $A=a^w$. 只需要证明存在常数 C_k，$k=1,2,\cdots$，使得

$$\|A\|_{k,\mathrm{Op}(S(M,g))}\leqslant C_k. \quad (6.3.24)$$

因此，这个定理是拟微分算子的一个非常重要的特征化定理.

6.4 算子的逆与象征的逆

我们知道当一个拟微分算子 a^w 在两个 Sobolev 空间之间是一个同构映射时，逆算子是存在的. 但这个逆算子是否还是一个拟微分算子，也就是说象征 a 在拟微分算子的象征运算下是否可逆是一个非常重要的问题. 若 a^w 是一个经典的椭圆算子(相应于度量 $g_{1,0}$)，则这一问题的回答是肯定的. 但是对于一般的 Hörmander 度量，这是一个非常复杂和尚未解决的问题. 我们现在对度量加上一个所谓的强缓增条件后来研究这一问题.

定义 6.4.1 1) *称一个度量 g 是"强缓增"的，若存在一个定义于 $\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$上的正函数 $d(X,Y)$使得下列关系式成立：存在 $C>0$，$N>0$，$r>0$ 使得$\forall X,Y,Z\in\mathbf{R}^{2n}$有*

$$d(X,Y)\leqslant d(X,Z)+d(Z,Y), \quad (6.4.1)$$

$$\left(\frac{g_X}{g_Y}\right)^{\pm 1} \leqslant C(1+d(X,Y))^N, \tag{6.4.2}$$

$$1+d(X,Y) \leqslant C\Delta_r(X,Y)^N. \tag{6.4.3}$$

2) **称一个度量 g 可以被一个强缓增的度量控制，若存在一个强缓增的 Hörmander 度量 $\tilde{g}$ 使得 $\forall X,Y\in \mathbf{R}^{2n}$ 有**

$$g_X(\cdot)\leqslant \tilde{g}_X(\cdot), \tag{6.4.4}$$

$$\left(\frac{g_X}{g_Y}\right)^{\pm 1} \leqslant C(1+\tilde{g}_Y^\sigma(X,Y))^N. \tag{6.4.5}$$

注 关系式(6.4.3)表明当 $g_X(X-Y)\leqslant r^2$ 时，$d(X,Y)\leqslant C''$. 也就是说 g-球 $U_{X,r}$ 可以包含于由“距离”d 定义的球中. 因此在相差一个常数的情况下，“距离”d 可以由度量 g 的测地距离来控制.

对于经典的(ρ,δ)型度量

$$g^{\rho,\delta}_{x,\xi}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\xi)=\langle\xi\rangle^{2\delta}\mathrm{d}x^2+\langle\xi\rangle^{-2\rho}\mathrm{d}\xi^2,$$

其中 $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$，$\delta<1$（当 $\delta=1$ 时 $g^{\rho,\delta}_{x,\xi}$ 不是缓增度量）. 我们有下面的结论.

命题 6.4.2 1) **当 $0\leqslant\delta\leqslant\rho<1$ 时，度量 $g^{\rho,\delta}$ 是强缓增的.**

2) **当 $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$，$\delta<1$ 时，度量 $g^{\rho,\delta}$ 可以被强缓增的度量控制.**

证 1) 令 $d(X,Y)=|\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}|$，则有

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= |\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\zeta\rangle^{1-\rho}+\langle\zeta\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}| \\ &\leqslant |\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\zeta\rangle^{1-\rho}|+|\langle\zeta\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}| \\ &= d(X,Z)+d(Z,Y). \end{aligned}$$

为了验证(6.4.2)，不妨设$|\xi|\geqslant|\eta|$，这时有

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_X}{g_Y}\right)^{\pm 1} &\leqslant \frac{\langle\xi\rangle^{2\rho}}{\langle\eta\rangle^{2\rho}} = \left(1+\frac{\langle\xi\rangle^{1-\rho}}{\langle\eta\rangle^{1-\rho}}-1\right)^{\frac{2\rho}{1-\rho}} \\ &= \left(1+\frac{\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}}{\langle\eta\rangle^{1-\rho}}\right)^{\frac{2\rho}{1-\rho}} \\ &\leqslant (1+\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho})^{\frac{2\rho}{1-\rho}}. \end{aligned}$$

为证估计式(6.4.3)，设 $r<1$，$|\eta|\leqslant|\xi|$. 则当$\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho\leqslant\langle\eta\rangle$

时，有

$$d(X,Y)\leqslant\langle\xi\rangle^{1-\rho}-(\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho)^{1-\rho}\leqslant 3,$$

由于 $\Delta_r\geqslant 1$，这就得到了(6.4.3). 另一方面由 Δ_r 的定义有

$$\Delta_r(X,Y)\geqslant\langle\xi\rangle^{-2\delta}\left(\frac{\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle}{3}\right)^2.$$

因此当$\langle\eta\rangle\leqslant\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho$ 时，也有

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho} = \langle\xi\rangle^{1-\rho}\left[1-\left(\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)^{1-\rho}\right] \\ &\leqslant \langle\xi\rangle^{1-\rho}\left(1-\frac{\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)^{\frac{1-\rho}{1-\delta}} = \frac{\langle\xi\rangle^{1-\rho}}{\langle\xi\rangle^{\frac{1-\rho}{1-\delta}}}(\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle)^{\frac{1-\rho}{1-\delta}} \\ &= \langle\xi\rangle^{-\frac{\delta(1-\rho)}{1-\delta}}\langle\xi\rangle^{\frac{\delta(1-\rho)}{1-\delta}}(\langle\xi\rangle^{-2\delta}(\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle)^2)^{\frac{1-\rho}{2(1-\delta)}} \\ &\leqslant 9\Delta_r(X,Y)^{\frac{1-\rho}{2(1-\delta)}}. \end{aligned}$$

这就证明了 1)的结论.

2) 由于当 $\delta<1$ 时，$g^{\delta,\delta}$ 是强缓增的，而这时度量 $g^{\rho,\delta}$ 可以由 $g^{\delta,\delta}$ 控制.

定理 6.4.3 **假设度量 g 是强缓增的，或者是由强缓增的度量控制的. 设 $b\in S(1,g)$，$\|b^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}<1$. 则存在 $b'\in S(1,g)$ 使得 $b'\#(1-b)=1$.**

为了证明这一定理，我们将证明 Neumann 级数 $\sum_{j=0}^{+\infty}b^{\#j}$ 在 $S(1,g)$中收敛. 为此先作一些半范的估计.

引理 6.4.4 **$\forall n_0$，$\exists C_0$，$\exists k_0$，以及 $\forall n_1$，$\exists C_1$，$\exists k_1$，使得：$\forall p\in\mathbf{N}$，$\forall J\subset\{0,1,\cdots,p-1\}$，$\forall\{c_j\}\subset\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$，$\forall\{Y_j\}\subset\mathbf{R}^{2n}$，有**

$$\begin{aligned} &\|(c_0\#c_1\#\cdots\#c_p)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)} \\ &\leqslant C_0^{p-|J|+1}C_1^{|J|}\|c_0\|_{k_1,Y_0,r}(\sup_{j\notin K,\,j\neq 0}\|c_j\|_{k_0,Y_j,r})^{p-|J|} \\ &\quad\cdot(\sup_{j\in K,\,j\neq 0}\|c_j\|_{k_1,Y_j,r})^{|J|}\prod_{j=0}^{p-1}\Delta_r(Y_j,Y_{j+1})^{-n_0} \\ &\quad\cdot\prod_{j\in J}\Delta_r(Y_j,Y_{j+1})^{-n_1}, \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

其中 $K=\{j\in\{0,1,\cdots,p\};\ j\in J$ 或者 $j+1\in J\}$.

证 用 $\mathscr{A}$ 记上式的左边，则有

$$\mathscr{A}\leqslant \|(c_0\# c_1)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\|(c_2\# c_3)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\cdots,$$

$$\mathscr{A}\leqslant \|c_0^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\|(c_1\# c_2)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\cdots.$$

由软禁半范的估计结果，存在常数 C,k 使得

$$\|c_0^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C\|c_0\|_{k,Y,r},\quad \|c_p^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C\|c_p\|_{k,Y,r},$$

以及

$$\|(c_j\# c_{j+1})^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C\|c_j\# c_{j+1}\|_{k,Y,r}.$$

因此由双软禁估计，有

$$\|(c_j\# c_{j+1})^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C_0\|c_j\|_{k_0,Y_j,r}\|c_{j+1}\|_{k_0,Y_{j+1},r}\cdot\Delta_r(Y_j,Y_{j+1})^{-n_0},\quad \forall j\notin J,$$

$$\|(c_j\# c_{j+1})^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C_1\|c_j\|_{k_1,Y_j,r}\|c_{j+1}\|_{k_1,Y_{j+1},r}\cdot\Delta_r(Y_j,Y_{j+1})^{-n_0-2n_1},\quad \forall j\in J,$$

其中 C_0,k_0 仅与 n_0 有关，因此在上面两式中取几何平均就得到了(6.4.6).

引理 6.4.5 *假设 g 是一个强缓增的度量，则存在仅与 g 有关的常数 C_0,k_0，以及任给 $k\in\mathbf{N}$，存在 C_1,k_1，使得：$\forall b\in S(1,g)$ 有*

$$\|(b^w)^p\|_{k,\mathrm{Op}(S(1,g))}\leqslant C_1(p+1)^{2k+1}(C_0\|b\|_{k_0,S(1,g)})^{p-2k}\cdot(C_1\|b\|_{k_1,S(1,g)})^{2k}. \tag{6.4.7}$$

证 令 $b=\int_{\mathbf{R}^{2n}}b_Y\,|g_Y|\,\mathrm{d}Y$，则由 $\mathrm{Op}(S(1,g))$ 的半范的定义，有

$$\|(b^w)^p\|_{k,\mathrm{Op}(S(1,g))}=\|(b^{\# p})^w\|_{k,\mathrm{Op}(S(1,g))}$$

$$=\sup_{Y_0,\nu,\,k'\leqslant k}\Big\|\int\cdots\int \mathrm{ad}\,L_1\cdots\mathrm{ad}\,L_{k'}(\theta^w_{Y_0,\nu}\circ b^w_{Y_0}\circ\cdots\circ b^w_{Y_p})\cdot|g_{Y_1}|^{1/2}\mathrm{d}Y_1\cdots|g_{Y_p}|^{1/2}\mathrm{d}Y_p\Big\|_{\mathscr{L}(L^2)}$$

$$\leqslant\sup_{Y_0,\nu}\int\cdots\int\|\mathscr{T}(Y_0,\nu,Y_1,\cdots,Y_p)\|_{\mathscr{L}(L^2)}|g_{Y_1}|^{1/2}\mathrm{d}Y_1\cdots|g_{Y_p}|^{1/2}\mathrm{d}Y_p,$$

其中

$$\mathscr{T}(Y_0,\nu,Y_1,\cdots,Y_p)=\sup_{k'\leqslant k}(\mathrm{ad}\,L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\,L_{k'})(\theta^w_{Y_0,\nu}\circ b^w_{Y_1}\circ\cdots\circ b^w_{Y_p}),$$

$L_j=\sigma(T_j,\cdot)^w$，$T_j\in\mathbf{R}^{2n}$，$g_{Y_0}(T_j)\leqslant 1$. 选取 L_j 使上面的上确界达到，利用式子

$$(\mathrm{ad}\,L)(a^w\circ b^w)=(\partial_T a)^w\circ b^w+a^w\circ(\partial_T b)^w,$$

则有

$$\mathscr{T}(Y_0,\nu,Y_1,\cdots,Y_p)=\sum\mathscr{U}=\sum(c_0\# c_1\#\cdots\# c_p)^w,$$

其中求和的项数至多为 $(p+1)^k$，以及(记 $\theta_{Y_0,\nu}$ 为 b_{Y_0})

$$c_j=\Big(\prod_{\alpha\in A_j}\partial_{T_\alpha}\Big)b_{Y_j},$$

其中 $A_j\subset\{1,\cdots,k\}$ 是一些两两不交的集合，当 A_j 是空集时，令 $c_j=b_j$.

现在记 $d_j=\prod_{\alpha\in A_j}g_{Y_j}(T_\alpha)^{-1/2}c_j$，以及当 $A_j=r$ 时，记 $d_j=c_j=b_j$. 则由强缓增条件有

$$g_{Y_j}(T_\alpha)\leqslant C(1+d(Y_0,Y_j))^N$$

$$\leqslant C(p+1)^{N-1}\sum_{l=0}^{j-1}(1+d(Y_l,Y_{l+1}))^N$$

$$\leqslant C^{n+1}(p+1)^{N-1}\sum_{l=0}^{j-1}\Delta_r(Y_l,Y_{l+1})^{N^2}.$$

因此

$$\mathscr{U}=\sum\mathscr{V}=\sum V(d_1\#\cdots\# d_p)^w,$$

其中求和的项数也至多只有 $(p+1)^k$ 个，还有

$$|V|\leqslant C_2(p+1)^{N_2}\prod\Delta_r(Y_j,Y_{j+1})^{m_jN_2},$$

其中 C_2,N_2 仅依赖于 g，$\sum m_j\leqslant k$. 记 $J'=\{j;\ m_j\neq 0\}\subset\{1,\cdots,k\}$，应用引理 6.4.2 于集合 J'，则存在仅依赖于 n_0 的常数 C_0,k_0，以及仅依赖于 n_1 的常数 $C_1\geqslant C_0$，$k_1\geqslant k_0$ 使得

$$\|\mathscr{V}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant C_0^{p-k+1} C_1^k C_2 C_3 (p+1)^{N_2} \Big(\sup_{j \notin K,\, j \neq 0} \| d_j \|_{k_0, Y_j} \Big)^{p-k+1}$$

$$\cdot \Big(\sup_{j \in K,\, j \neq 0} \| d_j \|_{k_1, Y_j, r} \Big)^k \prod_{j=0}^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1}, r)^{-n_0}$$

$$\cdot \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1 + m_j N_2},$$

其中$|2K| \leqslant 2k$，C_3 与 k 有关，是 $\theta_{Y,\nu}$ 的软禁半范的上界.

令 $B_l = \sup\limits_Y \| b_Y \|_{l,Y}$，则 B_l 只与 b 在 $S(1,g)$ 中的半范有关. 当 $j \in J$ 时，还有 $\| d_j \|_{l, Y_j} \leqslant \| b_{Y_j} \|_{l+k, Y_j}$. 因此，令 $k_2 = k_1 + k$，$|J \cup J'| \leqslant 2k$，则有

$$\|\mathscr{V}\|_{L(L^2)} \leqslant C_0^{p-k+1} C_1^k C_2 C_3 (p+1)^{N_0} B_{k_0}^{p-2k} B_{k_2}^{2k}$$

$$\cdot \prod_{j=0}^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_0} \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1 + kN_2}.$$

最后，由于有 $\mathscr{T} = \sum \mathscr{U} = \sum \sum \mathscr{V}$，因此我们就得到了下列估计

$$\|\mathscr{T}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant C_0 C_2 C_3 (C_0 B_{k_0})^{p-2k} (C_1 B_{k_2})^{2k} (p+1)^{2k+N_2}$$

$$\cdot \prod_{j=0}^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_0} \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1 + kN_2}.$$

现在取 n_0 与 k 无关. 则可以取定 C_0, k_0 使得

$$\sup_Y \int \Delta_r(Y, Z)^{-n_0} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z = C_4 < +\infty.$$

然后，对于每个 k，取 $n_1 = kN_0$. 则可以取定 $C_1(k), C_3(k), k_2(k)$. 最后关于 $Y_1, \cdots, Y_p$ 积分，则有

$$\|(b^{\# p})^w\|_{k, \mathrm{Op}(S(1,g))} \leqslant C_0 C_2 C_3 C_4^p (C_0 B_{k_0})^{p-2k}$$

$$\cdot (C_1 B_{k_2})^{2k} (p+1)^{2k+N_2}.$$

现在取 C_5 使得 $C_4^p (p+1)^{N_2 - 1} \leqslant C_5^p$，以及 $B_l \leqslant \| b \|_{l, \mathrm{Op}(S(1,g))}$. 这就完成了引理的证明.

定理 6.4.6 *假设 g 是一个强缓增的(或由强缓增的度量控制的)度量，设 $a \in S(1,g)$，$(a^w)^{-1}$ 存在且属于 $\mathscr{L}(L^2)$. 则存在 $a' \in S(1,g)$，使得 $a \# a' = a' \# a = 1$.*

证 假设 $1 - b \in S(1,g)$，$\| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} < 1$. 我们首先证明 $1-b$

在 $S(1,g)$ 中可逆. 任意给定 k，取 $0<\theta<1$，则存在常数 $C, \mathscr{K}$ (据定理 3.3.3)，使得

$$\|(b^w)^p\|_{k, \mathrm{Op}(S(1,g))} \leqslant C \|(b^w)^p\|_{0, \mathrm{Op}(S(1,g))}^{1-\theta} \cdot \|(b^w)^p\|_{\mathscr{K}, \mathrm{Op}(S(1,g))}^{\theta}.$$

另一方面有

$$\|(b^w)^p\|_{0, \mathrm{Op}(S(1,g))} \leqslant \sup_{Y,\nu} \|\theta_{Y,\nu}^w \circ (b^w)^p\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant C' \| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)}^p,$$

$\|(b^w)^p\|_{\mathscr{K}, \mathrm{Op}(S(1,g))}^{\theta}$ 则可用引理 6.4.5 估计，合并后有

$$\|(b^w)^p\|_{k, \mathrm{Op}(S(1,g))}$$

$$\leqslant C C'^{1-\theta} C_1^{\theta} (p+1)^{(2\mathscr{K}+1)\theta} (C_0 \| b \|_{k_0, S(1,g)})^{\theta(p-2\mathscr{K})}$$

$$\cdot (C_1 \| b \|_{k_1, S(1,g)})^{2\mathscr{K}\theta} \| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)}^{p(1-\theta)}.$$

由于 $\| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)}^{1-\theta} \leqslant \| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} < 1$，可以取 θ 充分小(依赖于 C_0, k_0)使得

$$\| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)}^{1-\theta} (\| b \|_{k_0, S(1,g)})^{\theta} < 1.$$

这就证明了

$$\|(b^w)^p\|_{k, \mathrm{Op}(S(1,g))} \leqslant C(b,k)(p+1)^{N_1} \varepsilon^p,$$

其中 $0<\varepsilon<1$. 因此 $\sum_{p=0}^{+\infty} b^{\# p}$ 在 $S(1,g)$ 中收敛，以及

$$(1-b) \# \sum_{p=0}^{+\infty} b^{\# p} = 1.$$

现在设 $a \in S(1,g)$，$(a^w)^{-1} \in \mathscr{L}(L^2)$. 我们证明 $\bar{a} \# a$ 在 $S(1,g)$ 中可逆. 因为若这个结论成立，即存在 $b \in S(1,g)$，使得 $b \# (\bar{a} \# a) = 1$. 记 $a' = b \# \bar{a}$，则 $a' \in S(1,g)$，以及 $a' \# a = 1$. 由于它们都是自共轭算子，还有 $a \# a' = 1$.

记 $\mathscr{A} = \bar{a}^w \circ a^w$，则由假设有

$$\| u \|_{L^2}^2 = \|(a^w)^{-1} a^w u\|_{L^2}^2 \leqslant C \| a^w u \|_{L^2}^2.$$

因此

$$C_1 \| u \|_{L^2}^2 \leqslant (\mathscr{A} u, u)_{L^2} \leqslant C_2 \| u \|_{L^2}^2,$$

其中 $0<C_1<C_2$. 现在令 $\mathscr{A} = C_2(1 - b^w)$，则 $b^w = 1 - C_2^{-1} \mathscr{A}$，以及

$$(b^w u, u) = (u,u) - C_2^{-1} (\mathscr{A} u, u)$$

$$\leqslant \| u \|_{L^2}^2 - C_1 C_2^{-1} \| u \|_{L^2}^2$$

$$\leqslant \frac{C_2 - C_1}{C_2} \| u \|_{L^2}^2.$$

因此$\| b^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} < 1$. 这就证明了$\mathscr{A} = \bar{a} \# a$在$S(1,g)$中可逆. 这样就完成了当$g$是强缓增度量时定理的证明.

下面设g由一个强缓增的度量$\bar{g}$控制，则$a \in S(1,g) \subset S(1,\bar{g})$，以及$(a^w)^{-1} \in \mathscr{L}(L^2)$. 因此由前面的结论，存在$a' \in S(1,\bar{g})$使得$a' \# a = a \# a' = 1$. 下面证明事实上有$a' \in S(1,g)$. 也就是要证明$\forall P, T \in \mathbf{R}^{2n}$，当$g_P(T) \leqslant 1$时，有$|\partial_T a'(P)| \leqslant C_0$，以及高阶微分的类似的估计.

对于这样的P,T记$M_{P,T}(Y) = g_P(T)$. 则$M_{P,T}$是关于$\bar{g}$缓增、缓变的权函数，且缓增缓变常数与P,T无关，以及

$$\partial_T a \in S(M_{P,T}, g) \subset S(M_{P,T}, \bar{g}).$$

因此，对任意的k，存在与P,T无关的常数C_k，使得

$$\| (\partial_T a)^w \|_{k, \mathrm{Op}(S(M_{P,T}))} \leqslant C_k.$$

另一方面，$0 = \partial_T(a' \# a) = (\partial_T a') \# a + a' \# (\partial_T a)$. 因此

$$\partial_T a' = - a' \# \partial_T a \# a'.$$

由于有

$$\| a \# b \|_{k, S(MM', g)} \leqslant C \| a \|_{l, S(M,g)} \| b \|_{l, S(M',g)},$$

因此对任意的k，存在与P,T无关的常数C_k，使得

$$\| \partial_T a' \|_{k, S(M_{P,T}, g)} \leqslant C_k,$$

特别地，当$k=0$时就得到了$|\partial_T a'(P)| \leqslant C_0 g_P(T)$，也就是

$$\| a' \|_{1, S(1,g)} \leqslant C < +\infty.$$

类似地，对于$P, T_1, T_2 \in \mathbf{R}^{2n}$，$g_P(T_j) \leqslant 1$可以证明

$$\partial_{T_1} \partial_{T_2} a' \in S(M_{P,T_1} M_{P,T_2}, \bar{g}).$$

这又导出了$\| a' \|_{2, S(1,g)} < +\infty$. 最后可归纳证明$a' \in S(1,g)$. 这就证明了定理.

为了将这一结果推广到由一般的权函数定义的象征空间$S(M,g)$上，我们需要证明在这个空间内至少有一个“椭圆型”算子. 这在经典的情况下是平凡的，因为$(1-\Delta)^t$是一个非常好的椭圆型算子族. 下面建立类似的结果.

定理 6.4.7 *假设g是一个强缓增的度量，$M(X)$是它的一个光滑的允许权函数. 则存在唯一一个定义于$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n}$上的映射$(t,X) \to b_t(X)$，使得$b_t \in S(M^t, g)$以及映射$t \to b_t^w$是从$\mathbf{R}$到$\mathscr{L}(L^2, \mathscr{S}')$连续的，并且对于所有的$t$满足*

$$b_t = 1 + \int_0^t (\log M) \# b_s \mathrm{d}s. \tag{6.4.8}$$

此外，这个映射还是$C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n})$类的，以及

$$\partial_t b_t = (\log M) \# b_t, \tag{6.4.9}$$

$$b_t \# b_s = b_{t+s}, \quad b_0 = 1. \tag{6.4.10}$$

证 如果在(6.4.9)中不是象征的复合运算#，而是通常的乘法，则这是一个简单的常微分方程的结果. 因此我们将采用类似的方法来证明我们的定理.

首先假设$\{\theta_Y\}$是一个一致软禁于$\{U_{Y,r}\}$上的象征族，由于

$$|\log M(X) - \log M(Y)| \leqslant C \Delta_r(X,Y),$$

以及$\forall N$，$\Delta_r(X,Y) \# \theta_Y(X)$一致地软禁于$U_{Y,r}$上，我们有

$$\log M(X) = \log M(Y) + \gamma_Y(X), \tag{6.4.11}$$

其中$\theta_Y \# \gamma_Y$一致地软禁于$U_{Y,r}$上. 现在将(6.4.8)写成算子的形式，并且局部化，就有

$$\theta_Y^w b_t^w = \theta_Y^w + \int_0^t \theta_Y^w (\log M)^w b_s^w \mathrm{d}s$$

$$= \theta_Y^w + \int_0^t \log M(Y)\ \theta_Y^w b_s^w \mathrm{d}s + \int_0^t \theta_Y^w \gamma_Y^w b_s^w \mathrm{d}s, \tag{6.4.8$'$}$$

将$\theta_Y^w b_t^w$作为未知元，利用一阶线性常微分方程的求解公式，作形式推导后可知(6.4.8)′可以由下面的方程导出:

$$\theta_Y^w b_t^w = M(Y)^t \left(\theta_Y^w + \int_0^t M(Y)^{-s} \theta_Y^w \gamma_Y^w b_s^w \mathrm{d}s \right). \tag{6.4.8$''$}$$

因此我们只证明这个方程.

现在固定$T > 0$，$k \in \mathbf{N}$，一个允许权函数m，以及一个充分大的待定常数δ. 定义Banach空间E为由$[-T,T]$到$\mathscr{L}(L^2, \mathscr{S}')$的满足下列条件的连续映射$B$: $t \to B_t$组成的空间:

$$\| B \|_E = \sup_{|t| \leqslant T} e^{-\delta|t|} \| B_t \|_{k, \mathrm{Op}(S(mM^t, g))} < +\infty. \tag{6.4.12}$$

我们将问题稍微扩张一点，给定 $a\in S(m,g)$，研究映射

$$(LB)_t = C_t = a^w + \int_0^t (\log M)^w B_s \mathrm{d}s, \qquad (6.4.13)$$

由于 T,k 是任给的，取 $a=m=1$，L 的不动点的象征就是(6.4.8)的解. 我们将证明对于充分大的 δ, L 是 E 上的一个压缩映射. 为此对 C_t，$t\geqslant 0$ 作估计，当 $t<0$ 时，将 t 换成 $-t$，M 换成 $-M$ 即可. 类似于(6.4.8)″，作相应的变换后有

$$M(Y)^{-t}\theta_Y^w C_t = \theta_Y^w a^w + \int_0^t \theta_Y^w M(Y)^{-s}\gamma_Y^w B_s \mathrm{d}s, \qquad (6.4.14)$$

引进一个二重单位分解，我们可以得到

$$m(Y)^{-1}M(Y)^{-t}\theta_Y^w C_t$$
$$= m(Y)^{-1}\theta_Y^w a^w + \sum_\nu \int_0^t\int \left(\frac{m(Z)M(Z)^s}{m(Y)M(Y)^s}\theta_Y^w\gamma_Y^w\psi_{Z,\nu}^w\right)$$
$$\cdot\, m(Z)^{-1}M(Z)^{-s}\theta_{Z,\nu}^w B_s\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z\mathrm{d}s.$$

现在设 $T_j\in\mathbf{R}^{2n}$，$g_Y(T_j)\leqslant 1$，$j=1,\cdots,k$. 令 $L_j=\sigma(T_j,\cdot)^w$，则

$$m(Y)^{-1}M(Y)^{-t}\prod(\mathrm{ad}\,L_j)(\theta_Y^w C_t)$$

可以写成 $m(Y)^{-1}\prod(\mathrm{ad}\,L_j)(\theta_Y^w a^w)$ 与有限个下列形式的式子的和

$$\sum_\nu\int_0^t\int K(Y,Z,\nu)^w\prod_{j\in J_0}(\mathrm{ad}\,L_j)$$
$$\cdot\,(m(Z)^{-1}M(Z)^{-s}\theta_{Z,\nu}^w B_s)\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z\mathrm{d}s,$$

其中 $K(Y,Z,\nu)^w$ 是

$$\frac{m(Z)M(Z)^s}{m(Y)M(Y)^s}\theta_Y^w\gamma_Y^w\psi_{Z,\nu}^w$$

与 L_j，$j\in J_0$ 的重叠交换子. 由于 $g_Z(T_j)\leqslant C_0\Delta_r(Y,Z)^{N_0}$，利用 $\mathrm{Op}(S(M^s,g))$ 的半范的定义，我们有

$$\left\|\prod_{j\in J_0}(\mathrm{ad}\,L_j)(m(Z)^{-1}M(Z)^{-s}\theta_{Z,\nu}^w B_s)\right\|_{\mathscr{L}(L^2)}$$
$$\leqslant C_0^k\Delta_r(Y,Z)^{N_0k}\mathrm{e}^{\delta s}\,\|B\|_E.$$

由于 $\{\theta_Y\#\gamma_Y\}$ 是一个一致软禁族，应用双软禁定理于 $\partial_T^{J_1}(\theta_Y\#\gamma_Y)\#\partial_T^{J_2}\psi_{Z,\nu}$，则对于所有的 N 有估计式

$$\|K(Y,Z,\nu)^w\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant C_N\Delta_r(Y,Z)^{-N}(1+\nu)^{-N},$$

其中 Δ_r 的一个适当的幂已用于吸收当 $|s|\leqslant T$ 时 $m(Z)M(Z)^s/m(Y)M(Y)^s$ 所带来的增长阶，另一部分已用于吸收 $\partial_T^{J_2}\psi_Z$ 的软禁半范中的因子 $\prod_{j\in J_2}(g_Z(T_j))^{1/2}$.

联合上面两个估计式，我们有

$$\left\|\prod(\mathrm{ad}\,L_j)(m(Y)^{-1}M(Y)^{-t}\theta_Y^w C_t)\right\|_{\mathscr{L}(L^2)}$$
$$\leqslant \|a^w\|_{k,\mathrm{Op}(S(m,g))} + C_N C^{N_0k}\sum_\nu\int_0^t\int\Delta_r(Y,Z)^{N_0k-N}$$
$$\cdot\,(1+\nu)^{-N}\mathrm{e}^{\delta s}\,\|B\|_E\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z\mathrm{d}s.$$

现在取定 N 使得 $\Delta_r^{N_0k-N}$ 是可积的. 则存在一个与 δ 无关的常数 C_1 使得

$$\|(LB)_t\|_{k,\mathrm{Op}(mM^t,g))}\leqslant\|a^w\|_{k,\mathrm{Op}(S(m,g))}+C_1\delta^{-1}\,\|B\|_E\mathrm{e}^{\delta t}.$$

这证明了 L 是从 E 到 E 的映射. 同样的计算应用于 $(LB_1)_t-(LB_2)_t$ 就导出估计式

$$\|LB_1-LB_2\|_E\leqslant C_1\delta^{-1}\,\|B_1-B_2\|_E. \qquad (6.4.15)$$

现在取定 $\delta>C_1$，则 L 是 E 上的压缩映射. 因此存在 $LB=B$ 的唯一的解 $B\in E$，即

$$B_t = a^w + \int_0^t (\log M)^w B_s \mathrm{d}s.$$

现在应用上述结果于 $a=m=1$ 和任意的 T,k，则对于充分大的 δ 由于解在 E 中的唯一性，我们有，对于 $k_1\leqslant k_2$，$T_1\leqslant T_2$，相应于 (k_1,T_1) 的解就等于相应于 (k_2,T_2) 的解限制在 $[-T_1,T_1]$ 上. 因此我们可以得到一个定义于整个 $\mathbf{R}$ 上的映射 $t\to B_t$ 使得 $B_t\in\mathrm{Op}(S(M^t,g))$. 因此 $B_t=b_t^w$，$b_t\in S(M^t,g)$ 以及

$$b_t = 1+\int_0^t (\log M)\# b_s\mathrm{d}s.$$

这个方程表明 $t\to b_t$ 限制在 $(-T,T)$ 是一个取值于 $S(M^T+M^{-T},g)$ 的光滑映射. 由此导出微分方程

$$\frac{\partial b_t}{\partial t} = (\log M)\# b_t.$$

最后对于固定的 s，映射 $t\to b_t\# b_s$ 和 $t\to b_{t+s}$ 是下列方程的两个解：

$$c_t = b_s + \int_0^t (\log M)\# c_\tau \mathrm{d}\tau,$$

现在取 $m=M^s$，则由(6.4.13)的解的唯一性，有 $b_t\# b_s=b_{t+s}$. 这就证明了定理.

这里我们假设了权函数是光滑的，对于一般的度量可以用其正则化

$$\int \log M(Z)\ \varphi_Z(X)\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z$$

来代替(6.4.8)中的 $\log M(X)$. 现在我们就可以证明本章最重要的结果，即由算子的可逆性可以导出象征的可逆性.

定理 6.4.8 *假设 g 是一个强缓增的度量(或者可以由强缓增的度量控制)，M 为它的允许权函数，$a\in S(M,g)$. 若存在一个允许权函数 M_1，使得 a^w：$H(M_1,g)\to H(M_1M^{-1},g)$ 是一个可逆映射，则存在 $a'\in S(M^{-1},g)$ 使得*

$$a\# a' = a'\# a = 1. \qquad (6.4.16)$$

证 根据定理 6.4.7(令 $t=1$ 和 $t=-1$)，存在 $b\in S(M_1^{-1},g)$，$b'\in S(M_1,g)$，$c\in S(M_1M^{-1},g)$，$c'\in S(M_1^{-1}M,g)$，使得

$$b'\# b = b\# b' = 1,\quad c'\# c = c\# c' = 1.$$

则 $c^w\circ a^w\circ b^w$ 在 L^2 上可逆. 因此由定理 6.4.3，存在 $d\in S(1,g)$ 使得 $c\# a\# b\# d=1$，因此也有 $a\# b\# d\# c=1$. 令 $a'=b\# d\# c\in S(M^{-1},g)$. 则有 $a\# a'=a'\# a=1$. 这就证明了定理.

6.5 Littlewood-Paley 理论

我们现在进一步研究带权 Sobolev 空间. 利用度量的强缓增性，我们能给出一个比 6.2 节中更加漂亮的带权 Sobolev 空间的 Littlewood-Paley 理论.

定理 6.5.1 *假设 g 是一个强缓增的度量(或者是可以由一个强缓增的度量控制的度量). $\{\varphi_Y\}$ 是一族从属于 $\{U_{Y,r}\}$ 的单位分解则*

1) 存在一个一致地软禁于 $\{U_{Y,r}\}$ 上的象征族 $\{\psi_Y\}$，使得

$$\int \psi_Y\#\varphi_Y\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y = 1; \qquad (6.5.1)$$

2) 函数 $u\in H(m,g)$ 的充分必要条件是下列 Littlewood-Paley 型估计：

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} m(Y)^2\,\|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y < +\infty.$$

根据 Sobolev 空间 $H(m,g)$ 的定义 6.2.1，立即有 1)⇒2). 因为令

$$\psi_{Y,0}=\psi_Y,\quad \theta_{Y,0}=\varphi_Y,\quad \psi_{Y,\nu}=\theta_{Y,\nu}=0,\ \nu\geqslant 1,$$

则 2)就是 $\|u\|_{H(m,g)}^2$ 的定义. 而 1)的证明则由下面的引理给出.

引理 6.5.2 *算子 $A=\int(\varphi_Y^w)^2\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$ 是 $\mathscr{L}(L^2)$ 中的一个可逆算子.*

由这个引理立即可以推出定理 6.5.1 的(1). 因为由前面的定理 6.4.4，A 的逆也是一个拟微分算子 c^w，其中 $c\in S(1,g)$，所以

$$1 = \int c\#\varphi_Y\#\varphi_Y\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y.$$

令 $\psi_Y=c\#\varphi_Y$，则 $\{\psi_Y\}$ 一致地软禁于 $U_{Y,r}$ 上.

引理 6.5.2 之证明 由于函数 φ_Y 是实函数，φ_Y^w 是自共轭算子，所以

$$\|u\|_{L^2}^2 = (Bu,u)_{L^2} + (Cu,u)_{L^2},$$

其中

$$B = \iint_{g_Y(Y-Z)\leqslant R} \varphi_Z^w\varphi_Y^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z,$$

$$C = \iint_{g_Y(Y-Z)\geqslant R} \varphi_Z^w\varphi_Y^w\,|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y\,|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z,$$

R 是一个充分大的待定常数. 由 Cotlar 引理

$$\| C \|^2_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant \sup_{g_S(S-T)\geqslant R} \iint_{g_Y(Y-Z)\geqslant R} \| \varphi_S^w \varphi_T^w$$

$$\circ\, \varphi_Z^w \varphi_Y^w \|_{\mathscr{L}(L^2)} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z$$

$$\leqslant C_0 \sup_{g_S(S-T)\geqslant R} \iint_{g_Y(Y-Z)\geqslant R} \Delta_r(S,T)^{-N} \Delta_r(T,Y)^{-N}$$

$$\cdot\, \Delta_r(Z,Y)^{-N} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

由于 $1+g_Y(Y-Z)\leqslant C_0\Delta_r(Y,Z)^{N_0}$，有

$$\Delta_r(S,T)^{-N} \leqslant C_0^{-N}(1+g_S(S-T))^{-N/N_0}$$

$$\leqslant C_0^{-N_0}(1+R)^{-N/N_0}.$$

因此取 $N>2nN_0$，则当 $R\to+\infty$ 时，上式趋于 0. 因此可以取定一个充分大的 R，使得 $\| C \|_{\mathscr{L}(L^2)}\leqslant 1/2$. 这时就有

$$\| u \|^2_{L^2} \leqslant 2(Bu,u)_{L^2}$$

$$\leqslant 2 \iint_{g_Y(Y-Z)\leqslant R} \| \varphi_Y^w u \|_{L^2} \| \varphi_Z^w u \|_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z$$

$$\leqslant \iint_{g_Y(Y-Z)\leqslant R} (\| \varphi_Y^w u \|^2_{L^2} + \| \varphi_Z^w u \|^2_{L^2}) |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

由于 g 是缓变的，存在仅依赖于 R 的常数 R'，使得当 $g_Y(Y-Z)\leqslant R$ 时，有 $g_Z(Y-Z)\leqslant R'$. 这时对于已经固定的 R,R' 有

$$\sup_Y \int_{g_Y(Y-Z)\leqslant R} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z < +\infty,$$

$$\sup_Z \int_{g_Z(Y-Z)\leqslant R} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y < +\infty.$$

这就最后证明了

$$\| u \|^2_{L^2} \leqslant C \int \| \varphi_Y^w u \|^2_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y = C(Au,u)_{L^2}.$$

因此 A 在 $\mathscr{L}(L^2)$ 中可逆. 这就证明了引理.

对于带权 Sobolev 空间，我们还有下列有用的结果.

定理 6.5.3 1) *假设 M 是 g 的一个允许权函数，$u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. 则下列三条性质是等价的：*

(i) $u\in H(M,g)$.

(ii) *任给 $a\in S(M,g)$，有 $a^w u\in L^2$.*

(iii) *存在 $a'\in S(M^{-1},g)$，$v\in L^2$，使得 $u=a'^w v$.*

2) *空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 在 $H(M,g)$ 中稠密.*

3) *空间 $H(M,g)$ 的对偶空间是 $H(M^{-1},g)$.*

证 我们已经有(i)⇒(ii)，反过来根据定理 6.4.6，存在一个可逆算子 $a^w\in \mathrm{Op}(S(M,g))$，假设它的逆是 a'^w. 则 a'^w：$L^2\to H(M,g)$，因此 $u=a'^w a^w u\in H(M,g)$. (iii)等价于(i)也由定理 6.4.6 导出.

由于 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，以及由定理 6.4.6 存在 $a'\in S(M,g)$ 使得 a'^w：$L^2\to H(M,g)$ 是同构映射. 因此 $a'^w(\mathscr{S}(\mathbf{R}^n))$ 也在 $H(M,g)$ 中稠密.

最后对于定理 6.4.6 中的可逆算子 a^w，表达式 $(a^w u,a^w u)_{L^2}$ 是 $H(M,g)$ 上的内积，因此 $\bar{a}^w a^w$ 给出了 $H(M,g)$ 到它的对偶上的一个同构. 但是这个算子是从 $H(M,g)$ 到 $H(M^{-1},g)$ 的一个双射. 这就证明了定理.

最后研究 Sobolev 空间 $H(M,g)$ 对度量的依赖关系. 称允许权函数 M 对于一个 Hörmander 度量是正则的，若有 $M\in S(M,g)$ 前面已经证明了任何一个允许权函数都是等价于一个正则允许权函数的.

定理 6.5.4 *假设 M 同时是关于两个 Hörmander 度量 g_1,g_2 的正则权函数. 则 $H(M,g_1)=H(M,g_2)$.*

事实上，在定理 6.4.5 的证明中，单参数族 $\{b_t\}$ 的无穷小生成元 $\log M$ 与度量的选取无关. 因此 b_1 同时是 $H(M,g_1)$ 到 L^2 以及 $H(M,g_2)$ 到 L^2 的双射. 这就证明了定理.

当 M 不是正则时，无穷小生成元是 $\log M$ 的正则化，这时正则化过程是与具体的度量有关的. 因此对于一个一般的相应于两个度量的允许权函数，我们并不能得到上述结论. 但是，特别地如果 $g_1\leqslant g_2$，以及 M 是相应于这两个度量的一个允许权函数. 则也有

$$H(M,g_1)=H(M,g_2),$$

因为这时将 M 关于 g_1 正则化后得到的权函数关于 g_2 也是正则的. 我们以后将经常用到这一结果.

6.6 Hörmander 平方和算子的逆

在下一章, 我们介绍非齐性空间上的拟微分算子在研究非线性双曲型方程的奇异性的传播方面的应用, 即所谓高次微局部分析. 在本节我们介绍它们在另一类算子上的应用, 我们将利用前面所讲的非齐性微局部分析来证明 Hörmander 平方和算子的逆还是一个拟微分算子. 从这一结果我们也可以看出为什么要建立非齐性的微局部分析, 以及怎样根据所研究的算子来选择和构造相应的最合适的权函数和度量. 而这是一个非常复杂的问题.

假设 $P_1,\cdots,P_m\in S^1_{1,0}(\mathbf{R}^n)$是一组实的象征. 假设它们满足所谓的二阶 Hörmander 条件, 即: 存在常数 $C>0$ 使得对于所有的$(x,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, 有

$$\sum_{j=1}^{m}|P_j^0(x,\xi)|^2+\sum_{i,j}|\{P_i^0,P_j^0\}(x,\xi)|^2\geqslant C|\xi|^2, \tag{6.6.1}$$

其中 $P_j^0(j=1,2,\cdots,m)$表示 P_j 的主象征. 本节就是要研究下面的 Hörmander 型算子

$$\Delta_H=1+\sum_{j=1}^{m}P^*(x,\mathrm{D})_jP_j(x,\mathrm{D}) \tag{6.6.2}$$

的逆, 其中 $P_j^*(x,\mathrm{D})$是 $P_j(x,\mathrm{D})$的形式共轭算子. 众所周知, 它是一个次椭圆算子(见[Höl, R-S]), 即: 存在常数 $C>0$, 使得任给 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C[|(\Delta_H\varphi,\varphi)|+\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}], \tag{6.6.3}$$

利用这一次椭圆估计和闭图像定理可以导出 Δ_H 的逆是存在的. 但是, 以前我们只知道它是一个奇异积分算子. 现在我们将证明这个逆实际上也是一个 Hörmander 型拟微分算子.

对于 $X=(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n}$, 令

$$G(X)=\Big(1+\sum_{j=1}^{m}|P_j^0(X)|^4+\sum_{i,j=1}^{m}|\{P_i^0,P_j^0\}(X)|^2\Big)^{1/4}, \tag{6.6.4}$$

$$g_X(\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}\xi^2)=\frac{\langle\xi\rangle^2\mathrm{d}x^2}{G^2(X)}+\frac{\mathrm{d}\xi^2}{G^2(X)}, \tag{6.6.5}$$

其中$\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. 我们将利用它们作为要研究的拟微分算子的权函数和度量. 由假设(6.6.1)首先有下列结果, 存在常数 $C>0$ 使得

$$C^{-1}\langle\xi\rangle^{1/2}\leqslant G(X)\leqslant C\langle\xi\rangle, \tag{6.6.6}$$

$$C^{-1}g_{1,0}\leqslant g\leqslant Cg_{1/2,1/2}. \tag{6.6.7}$$

以及满足下面的命题.

命题 6.6.1 *由(6.6.5)定义的度量 g 是一个缓增、缓变和满足测不准原理 $g_X\leqslant g_X^\sigma$ 的度量, 而且可以由强缓增的度量 $g_{1/2,1/2}$ 控制. 由(6.6.4)定义的函数 G 是 g 的一个光滑允许权函数, 以及 $\Delta_H\in\mathrm{Op}(S(G^2,g))$.*

证 由于 $P_j^0(X)$都是光滑函数, 而且度量 g 是由权函数 G 定义的, 以及 $1+\sum_{j=1}^{m}P_j^*P_j\leqslant G^2$, 因此我们只证明 G 关于度量 $g_{1/2,1/2}$是缓增的. 而由命题 5.1.4 可以只证明 G^4 是缓增的. 利用对称性, 对于 $X=(x,\xi)$, $Y=(y,\eta)$有

$$\begin{aligned}(g_{1/2,1/2})^\sigma_{XY}(X-Y)&\equiv\Big(\frac{(g_{1/2,1/2})_X+(g_{1/2,1/2})_Y}{2}\Big)^\sigma(X-Y)\\&=\frac{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}|x-y|^2+\frac{|\xi-\eta|^2}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}.\end{aligned} \tag{6.6.8}$$

下面研究

$$\frac{G^4(X)}{G^4(Y)}-1=\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}$$

的估计. 为此先估计 $P_j^0(x,\xi)^4-P_j^0(y,\eta)^4$, 首先对任意的 a,b 有

$$\begin{aligned}a^4-b^4&=(a-b+b)^4-b^4\\&=(a-b)^4+4b(a-b)^3+6b^2(a-b)^2+4b^3(a-b),\end{aligned}$$

因此有

$$|P^j(x,\xi)^4 - P_j^0(y,\eta)^4| \leqslant 6\sum_{k=0}^{3}|P_j^0(x,\xi)-P_j^0(y,\eta)|^{4-k}G^k(Y),$$

类似地有

$$\begin{aligned}&|[P_i^0,P_j^0]^2(X)-[P_i^0,P_j^0]^2(Y)|\\ &\leqslant |[P_i^0,P_j^0](X)-[P_i^0,P_j^0](Y)|^2\\ &\quad + |[P_i^0,P_j^0](X)-[P_i^0,P_j^0](Y)|G^2(Y).\end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}&|P_j^0(x,\xi)-P_j^0(y,\eta)|\\ &\leqslant |P_j^0(x,\xi)-P_j^0(y,\xi)|+|P_j^0(y,\xi)-P_j^0(y,\eta)|\\ &\leqslant C|\xi|\,|x-y|+C|\xi-\eta|,\end{aligned}$$

对于 $|[P_i^0,P_j^0](x,\xi)-[P_i^0,P_j^0](y,\eta)|$ 也有类似的估计，这就导出了

$$\left|\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{3}(|x-y|^{4-k}\langle\xi\rangle^{4-k} + |\xi-\eta|^{4-k})G^{-4+k}(Y).$$

因为 $G^{4-k}(Y)\geqslant c\langle\eta\rangle^{(4-k)/2}$，所以

$$\left|\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{3}[|x-y|^{4-k}\langle\xi\rangle^{4-k}\langle\eta\rangle^{(-4+k)/2} + |\xi-\eta|^{4-k}\langle\eta\rangle^{(-4+k)/2}].$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，首先研究 $|\xi|\leqslant\varepsilon^{-1}|\eta|$ 的情况，

$$\left|\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}\right| \leqslant C_\varepsilon\sum_{k=0}^{3}[|x-y|^{4-k}\langle\xi\rangle^{(4-k)/2} + |\xi-\eta|^{4-k}\langle\eta\rangle^{(-4+k)/2}].$$

同时还有

$$\frac{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}\geqslant C_\varepsilon\langle\xi\rangle,\quad \frac{1}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}\geqslant C_\varepsilon\frac{1}{\langle\eta\rangle}.$$

这就给出了当 $|\xi|\leqslant\varepsilon^{-1}|\eta|$ 时的缓增估计，

$$\frac{G^4(X)}{G^4(Y)}\leqslant\left|\frac{G^4(X)}{G^4(Y)}-1\right|+1\leqslant C(1+(g_{1/2,1/2})^\sigma_{XY}(X-Y))^N.$$

现在取 $\varepsilon|\xi|\geqslant|\eta|$，由于

$$\begin{aligned}&|P_j^0(x,\xi)-P_j^0(y,\eta)|\\ &\leqslant |P_j^0(x,\xi)-P_j^0(x,\eta)|+|P_j^0(x,\eta)-P_j^0(y,\eta)|\\ &\leqslant C|\xi-\eta|+C|x-y|\,|\eta|,\end{aligned}$$

以及对于 $|[P_i^0,P_j^0](x,\xi)-[P_i^0,P_j^0](y,\eta)|$ 的类似的估计，有

$$\left|\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{3}[|x-y|^{4-k}\langle\eta\rangle^{(-4+k)/2} + |\xi-\eta|^{4-k}\langle\eta\rangle^{(-4+k)/2}].$$

对于 ε 充分小，有

$$\frac{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}\approx\langle\xi\rangle,\quad \frac{1}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}\approx\frac{1}{\langle\xi\rangle},\quad |\xi-\eta|\approx|\eta|.$$

因此又可以得到

$$\left|\frac{G^4(X)-G^4(Y)}{G^4(Y)}\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{3}\left[|x-y|^{4-k}\left(\frac{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle}{\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle}\right)^{(-4+k)/2} + \frac{|\xi-\eta|^{4-k}}{(\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle)^{(4-k)/2}}\right].$$

这就最后证明了命题 6.6.1.

对于相应的 Sobolev 空间，利用前一章的结果有

$$H(G^k,g)=H(G^k,g_{1/2,1/2}),$$

因此我们将它们简记为 $H(G^k)$. 下面先证明几个引理.

引理 6.6.2 **算子 Δ_H^2 是一个从 $H(G^4)$ 到 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的同构映射.**

证 我们只需证明这个映射是可逆映射，即 $\forall\, u\in H(G^4)$ 有下列估计式

$$\|u\|_{H(G^4)}\leqslant C\|\Delta_H^2 u\|_{L^2}. \tag{6.6.9}$$

而由定理 6.5.1 有

$$\|u\|^2_{H(G^4)}=\int_{\mathbf{R}^{2n}}G^8(Y)\|\varphi_Y^w u\|^2_{L^2}\mathrm{d}Y,$$

其中利用了 $|g_{1/2,1/2}|=1$. 给定 $A>0$ 充分大，将 $\mathbf{R}^{2n}$ 分割成微局部的次椭圆区域 $\mathbf{S}_A$ 和椭圆区域 $\mathbf{E}_A$：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{S}_A &= \{Y=(y,\eta);\ G(Y)\leqslant A\langle\eta\rangle^{1/2}\},\\ \mathbf{E}_A &= \{Y=(y,\eta);\ G(Y)\geqslant A\langle\eta\rangle^{1/2}\}.\end{aligned}\right\}\tag{6.6.10}$$

在次椭圆区域 $\mathbf{S}_A$ 中，利用算子 Δ_H 的次椭圆性，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}_A} G^8(Y)\,\|\varphi_Y^w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}Y &\leqslant A^8\int\langle\eta\rangle^4\,\|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}Y\\ &\leqslant A^8\,\|u\|_{H^2}^2 \leqslant A^8 C\,\|\Delta_H^2 u\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{6.6.11}$$

在椭圆区域 $\mathbf{E}_A$ 中，令

$$G_4(x,\mathrm{D}) = I+\sum_{j=1}^m P_j^* P_j P_j^* P_j + \sum_{i,j}[P_j^*,P_i^*][P_i,P_j],$$

则，微分算子 $G_4(x,\mathrm{D})$ 的主象征是 $G^4(x,\xi)$，因此

$$I = (G^{-4})^w\circ G_4(x,\mathrm{D})+R,$$

其中 $R\in \mathrm{Op}(S(\lambda_g^{-1},g))$. 因此

$$\begin{aligned}G^8(Y)\,\|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 \leqslant 2[&\|\varphi_Y^w G^4(Y)(G^{-4})^w G_4(x,\mathrm{D})u\|_{L^2}^2\\ &+\|\varphi_Y^w G^4(Y)Ru\|_{L^2}^2].\end{aligned}$$

令 $\psi_Y = G^4\varphi_Y \# G^{-4}$，则 $\{\psi_Y\}$ 是一个一致地软禁于 $\{U_{Y,r}\}$ 上的象征族. 因此

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}}\|\varphi_Y^w G^4(Y)(G^{-4})^w G_4(x,\mathrm{D})u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}Y\leqslant C\,\|G_4(x,\mathrm{D})u\|_{L^2}^2.$$

对于余项，令

$$\Phi_Y = \begin{cases}\varphi_Y\#\sigma(R), & 若\ Y\in\mathbf{E}_A,\\ 0, & 若\ Y\in\mathbf{S}_A.\end{cases}$$

因为 $R\in\mathrm{Op}(S(\lambda_g^{-1},g))\subset \mathrm{Op}(S(\lambda_g^{-1},g_{1/2,1/2}))$，以及当 $Y\in\mathbf{E}_A$ 时 $\lambda_g^{-1}(Y)\leqslant A^{-1}$，由此导出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{E}_A} G^8(Y)\,\|\varphi_Y^w\circ Ru\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}Y &= \int_{\mathbf{R}^{2n}} G^8(Y)\,\|\Phi_Y^w u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}Y\\ &\leqslant \frac{C}{A^2}\,\|u\|_{H(G^4)}^2.\end{aligned}$$

这样我们就得到了估计式

$$\|u\|_{H(G^4)}^2 \leqslant C(A)[\|\Delta_H^2 u\|_{L^2}^2+\|G_4(x,\mathrm{D})u\|_{L^2}^2]+\frac{C}{A^2}\|u\|_{H(G^4)}^2,$$

取 A 充分大，则上面的不等式的最后一项可以被不等式的左边吸收. 另一方面，由于 $G_4(x,\mathrm{D})$，Δ_H^2 都是自共轭算子，并且有相同的主象征，因此

$$G_4(x,\mathrm{D}) = \Delta_H^2 + (一个自共轭的二阶算子),$$

利用 Δ_H 的次椭圆估计(6.6.3)，立即有

$$\|G_4(x,\mathrm{D})u\|_{L^2}^2 \leqslant C\,\|\Delta_H^2 u\|_{L^2}^2.$$

这样就证明了引理.

现在我们可以证明下面的主要定理.

定理 6.6.3 *Hörmander 平方和算子 Δ_H 的逆 Δ_H^{-1} 是一个属于 $\mathrm{Op}(S(G^{-2},g))$ 类的拟微分算子，即：存在 $a\in S(G^{-2},g)$ 使得*

$$\Delta_H^{-1}u(x) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\tag{6.6.12}$$

证 利用引理 6.6.2 和定理 6.4.6，我们有 $\Delta_H^{-2}\in\mathrm{Op}(S(G^{-4},g_{1/2,1/2}))$. 由于还有 $\Delta_H\in\mathrm{Op}(S(G^2,g_{1/2,1/2}))$，因此

$$\Delta_H^{-1} = \Delta_H^{-2}\circ\Delta_H \in \mathrm{Op}(S(G^{-2},g_{1/2,1/2})),$$

即：存在 $a\in S(G^{-2},g_{1/2,1/2})$，使得 $\Delta_H^{-1}=a^w$. 我们要证明，事实上有 $a\in S(G^{-2},g)$.

记 $L_j=\sigma(T_j,\cdot)^w$，$T_j\in\mathbf{R}^{2n}$，则有

$$\mathrm{ad}\,L_j\circ\Delta_H^{-1} = \Delta_H^{-1}(\mathrm{ad}\,L_j\circ\Delta_H)\Delta_H^{-1}.$$

由于 $\Delta_H\in S(G^2,g)$，有

$$\mathrm{ad}\,L_j\circ\Delta_H\in\mathrm{Op}(S(G^2 g.(T_j)^{1/2},g_{1/2,1/2})).$$

因此由归纳法

$$\mathrm{ad}\,L_1\circ\cdots\circ\mathrm{ad}\,L_k\circ\Delta_H\in\mathrm{Op}(S(G^2\prod_{j=1}^k g.(T_j)^{1/2},g_{1/2,1/2})).$$

由于

$$\mathrm{ad}\,L_1\circ\cdots\circ\mathrm{ad}\,L_k\circ\Delta_H^{-1} = \mathrm{ad}\,L_1\circ\cdots\circ\mathrm{ad}\,L_k\circ a^w,$$

其象征是 $\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_k}a(X)$ 属于 $S(G^2(\cdot)\prod_{j=1}^k g.(T_j)^{1/2},g_{1/2,1/2})$. 因此由象征的定义(5.1.7)(取 0 阶微分)就有

$$|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_k}a(X)|\leqslant CG^{-2}\prod_{j=1}^k g_X(T_j)^{1/2}.$$

这就证明了定理 6.6.3.

由定理 6.6.3 我们可以看到，对于退化椭圆算子 Δ_H，在适当的度量和权函数下它有“椭圆”性. 当然，对于一个一般的退化椭圆算子，寻找合适的度量和权函数又是一个非常困难的问题. 对于一些特殊的算子，文[Zh]构造出了相应的度量和权函数，并且得到了类似于定理 6.6.3 的结果，可以作为这类困难问题的例子.

第 7 章　高次微局部化理论

在前一章的最后一节，我们利用非齐性拟微分算子研究了一类退化椭圆算子的基本解. 在那里我们注意到了空间的非齐性与算子的各向异性是正好相配合的，这就是非奇性微局部分析与经典微局部分析的差别所在. 同时，非奇性微局部分析可以用来处理更多更复杂的问题，因为非奇性度量的选取有相当大的自由度. 如同经典的微局部分析除了可以研究椭圆算子的基本解外，还可以用来研究线性双曲型算子的波前集和奇性传播. 本章就简要地介绍一下非奇性微局部分析在研究非线性方程的解的奇性分析方面的应用，即所谓高次微局部化理论. 特别地，我们介绍二次微局部化及在非线性偏微分方程解的奇性研究中的一些很有趣的应用，从而展示这一套理论在偏微分方程研究中的巨大潜力. 由于这一理论相当复杂和正在发展中，我们在这里只作一简单的介绍，有关的具体细节见[Bon2,3].

7.1　高阶的度量和软禁

7.1.1　非缓增的度量

我们现在给出在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中具有下列性质的度量 g 的一些例子，由这些度量定义的象征类 $S(m,g)$ 中的元素在靠近 $\mathbf{R}^{2n}$ 中某子流形的余法丛时有奇异性，由于这些度量不满足缓增关系(5.1.19)（或(5.3.3)，它在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中与(5.1.19)等价）所以想把这些象征量子化时就出现了问题，这就是我们引入高次微局部化的基本动机.

下面先研究与原点的余法丛相对应的度量. 记$|\tilde{x}|^2=\min\{|x|^2, 1\}$, 考虑以下度量

$$g_X=\frac{1+|\xi|^2}{1+|\tilde{x}|^2|\xi|^2}dx^2+\frac{1}{1+|\xi|^2}d\xi^2. \tag{7.1.1}$$

我们有

$$g_X^\sigma=(1+|\xi|^2)dx^2+\frac{1+|\tilde{x}|^2|\xi|^2}{1+|\xi|^2}d\xi^2,$$

以及

$$\lambda_g=(1+|\tilde{x}|^2|\xi|^2)^{1/2}.$$

容易看到性质(5.1.4)(缓变性)和(5.1.18)(测不准原理)是满足的. 另一方面, 若取

$$x=y=0,\ |\xi|=R,\ |\eta|=R^2,\ R\to\infty,$$

容易看到缓增性质不满足. 然而, 对应的象征的优点是明显的: 若$h(x)$是0阶齐次、且在原点外是C^∞的函数, 我们可使它对应于$S(1,g)/S(\lambda^{-\infty},g)$中一适当定义的元素, 为此只需取一函数$\theta(t)$, 当$|t|<1/2$时等于0, $|t|\geqslant 1$时等于1, 并考虑象征$h(x)\theta(|x||\xi|)$. 将函数1表为这样一些函数h_i的和, 这些函数集中在空间$\mathbf{R}^{2n}$的小锥内, 我们看到, 若这种象征量子化是可能的话, 就可以在x上作锥型分割, 这在通常的拟微分计算中是不允许的.

再考虑与一平坦子流形的余法丛相对应的度量. 若S是在$\mathbf{R}^p_{x'}\times\mathbf{R}^{n-p}_{x''}$中由方程$x''=0$表示的子流形, 则其对应的度量为

$$g_X=dx'^2+\frac{1+|\xi|^2}{\lambda^2}dx''^2+\frac{d\xi'^2}{\lambda^2}+\frac{d\xi''^2}{1+|\xi|^2}, \tag{7.1.2}$$

其中$\lambda=1+|\xi'|^2+|\tilde{x}|^2|\xi|^2$. 对应象征量子化的可能性导出齐次算子$(D_1,\cdots,D_p,x_{p+1}|D|,\cdots,x_n|D|)$的合理定义.

最后看与$p-1$阶接触元素对应的度量. 为简单起见在平面$\mathbf{R}^2$上考虑问题. 我们定义$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$和$g_3$分别为

$$\lambda_1^2=1+\xi^2+\eta^2,$$

$$\lambda_2^2=1+(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)(\xi^2+\eta^2),$$

$$\lambda_3^2=1+\tilde{x}^2\xi^2+\tilde{y}^2\eta^2+\tilde{y}^2\eta^2+\tilde{x}^2\eta^2,$$

$$g_3=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}dx^2+\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}dy^2+\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2\lambda_3^2}d\xi^2+\frac{1}{\lambda_1^2}d\eta^2. \tag{7.1.3}$$

为理解这一似乎难以理解的定义, 必须注意在由$|\psi|<\varepsilon|x|$和$|\xi|<\varepsilon|\eta|$所确定的区域外, 度量g_3等价于一与原点余法丛相对应的度量. 反过来, 在这一区域及原点的邻域内, 我们有

$$g_3\approx\frac{dx^2}{x^2}+\frac{dy^2}{s^2x^2}+\frac{d\xi^2}{s^2\eta^2}+\frac{d\eta^2}{\eta^2},$$

其中$s=|x|^{p-1}+|y|/|x|+|\xi|/|\eta|$; $\lambda_3\approx s|x||\eta|$. 特别地, 给两条曲线$y=\alpha x^p$和$y=\beta x^p$, $\alpha\neq\beta$, 则在$S(1,g_3)$中存在象征, 在第一条曲线的余法丛的邻域中为1, 在第二条曲线的余法丛邻域中为0.

与几何关系对应的度量的其他例子可在[B-L]中找到, 例如与一个迷向子流形, 两个完全相截的Lagrange子流形, 一个Lagrange流形的余法丛的Lagrange子流形等各种几何关系对应的度量都曾由Lebeau(见[Le3])和Sjöstrand(见[Sj1])在解析背景下研究过.

7.1.2 几何条件

为简单起见, 我们在整个$\mathbf{R}^{2n}$中考虑问题, 局部的情况在[B-L]中有讨论. 给定一族上升的度量$g_1,\cdots,g_k$, 它们定义在$\mathbf{R}^{2n}$中并满足(5.1.4)(缓变性)和(5.1.18)(测不准原理). 因此, 对所有的Y我们有

$$g_{l,Y}(\cdot)\leqslant g_{l+1,Y}(\cdot)\leqslant g^\sigma_{l+1,Y}(\cdot)\leqslant g^\sigma_{l,Y}(\cdot).$$

用第5章的几何记号, 对与g_l相联系的概念使用指标$[U_{l,Y,r};\delta_{l,r};\lambda_l;g^\sigma_{l,XY},\cdots]$, 有时对$g_k$也用无指标的形式, 象征类不记作$S_0(m,g_l,\mathbf{R}^{2n})$而记作$S(m,g_l)$(当$\Omega=\mathbf{R}^{2n}$时, 象征类的定义对支集无任何要求). 当$l$增加时, 象征的计算愈来愈精细(有更多的象征), 但这样计算的"收益"减少(由λ_l的下降表出). 为将渐近计算量子化, 我们需要以下两个假设.

相对的对称缓增性 对每个半径充分小的g_l-球, 度量g_{l+1}具有一致常数的对称缓增性. 更明确地说, g_1在$\mathbf{R}^{2n}$中满足(5.1.4),

且存在 C 和 N，使得对 $l=1,\cdots,k-1$ 有

$$g_{l,X}(X-Y)\leqslant C^{-1}\Rightarrow \frac{g_{l+1,Y}(\cdot)}{g_{l+1,Y}(\cdot)}\leqslant C(1+g^{\sigma}_{l+1,XY}(X-Y))^{N}.$$

可比较性 存在 C 和 N，使得对 $l=1,\cdots,k-1$ 有

$$g_{l+1,X}(\cdot)\leqslant C\lambda_l(X)^N g_{l,X}(\cdot). \tag{7.1.4}$$

注 在应用于源于几何的例子时，我们经常有 $g^{\sigma}_{l,X}=\lambda_l(X)^2 g_{l,X}$. 特别，所有前面引入的度量的例子都是这样. 同样地，我们有

$$g_{l+1,X}\leqslant g^{\sigma}_{l+1,X}\leqslant g^{\sigma}_{l,X}=\lambda_l(X)^2 g_{l,X},$$

并且自然满足条件(7.1.4).

对于前面引入的这些度量，我们已知它们不是整体缓增的，但只要适当选取一串 g_j，它们都是相对缓增. 例如，在与原点的余法从相对应的度量和与一平坦子流形的余法丛相对应的度量这两种情况，g_1 取为通常的度量①：

$$dx^2+d\xi^2/(1+|\xi|^2),$$

而 g_2 为(7.1.1)或者(7.1.2)，可验证相对缓增条件是满足的. 当涉及由(7.1.3)给出的度量 g_3 时，必须取 g_1 同上，取 g_2 为相对于原点余法丛的度量.

下面我们看量子化原理，为简单起见，我们考虑由 $g_1\leqslant g_2$ 定义的二次微局部化的情形. 对 $a\in S(1,g_2)$，记

$$a^w=\int a_Y^w\,|g_Y|^{1/2}dY$$

(其中 $a_Y=\varphi_Y a$)，这样定义的算子 a^w 没有什么用处. 由于没有缓增性，就使得尽管用 Cotlar 引理可知 a^w 有意义，例如 L^2 上有界，却还是不能使 $a_Y^w a_Z^w$ 有充分小的模. 为此我们定义另一种量子化

$$a^Q=\int \Phi_Y^w\circ a_Y^w\circ\Phi_Y^w\,|g_Y|^{1/2}dY.$$

这里 Φ_Y 在 $S(1,g_1)$ 中是有界的，其支集在以 Y 为心的 g_1-球中，并

① 同样可取"调和振荡"的度量$(dx^2+d\xi^2)/(1+|x|^2+|\xi|^2)$. 那么我们有$g_1\leqslant g_2$，若必要的话可在 g_2 的定义中将$|x|^2$ 截断.

且在 a_Y 的支集上等于1，现在由以下两个理由，$\Phi_Y^w\circ a_Y\circ\Phi_Y^w\circ\Phi_Z^w\circ a_Z\circ\Phi_Z^w$ 有小的模. 若 $g_{1,Y}(Y-Z)$是大的，那么由于 g_1 的缓增性，$\Phi_Y^w\circ\Phi_Z^w$ 有一个小的模. 若 $g_{1,Y}(Y-Z)$是小的，则在这两点所处的区域内我们有 g_2 的对称缓增性，并有一致的常数.

最后，φ_Y 在 a_Y 的支集上等于1，我们可以希望它并不干扰象征的渐近计算(模 $\lambda_2^{-\infty}$). 对 k-限制的象征空间，我们不是把它定义成其他任何空间，而是定义为软禁象征的"三明治"空间(对 $g_1,\cdots,g_k$)，并适当地完备化.

7.1.3 高阶的软禁

设 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$的两个子空间，赋予一列半范(所加下标是重要的)后形成两个 Fréchet 空间，我们设映射 # 是从 $\mathscr{E}\times\mathscr{F}$ 连续映到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$. 那么投射的张量积的完备化 $\mathscr{E}\hat{\otimes}\mathscr{F}$ 也典则地赋有一列半范，且存在唯一的连续线性映射 π，使以下的交换图成立：

$$\begin{array}{ccc}\varepsilon\times\mathscr{F} & \xrightarrow{\ \otimes\ } & \varepsilon\hat{\otimes}\mathscr{F}\\ & \searrow^{\#} & \downarrow{\pi}\\ & & \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})\end{array}$$

我们记 π 的像为 $\mathscr{E}\hat{\#}\mathscr{F}$，赋有一列 $\mathscr{E}\hat{\otimes}\mathscr{F}/\ker\pi$ 的典则的半范，这是一个 Fréchet 空间. 事实上，我们考虑的空间都是与 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$相同的，因为可以证明 $\mathscr{S}\hat{\#}\mathscr{S}=\mathscr{S}$，但这里重要的不仅仅是 Fréchet 的结构，而是半范的一列下标.

例如，若 $\mathscr{E}_Y,\mathscr{F}_Y,\mathscr{G}_Y$ 依赖于参数 Y，张量积与商的万有性质表现为以下的性质：从 $\mathscr{E}_Y\hat{\#}\mathscr{F}_Y$ 到 $\mathscr{G}_Y$ 的线性映射 T_Y 对于 Y 是一致连续的充要条件，是双线性映射 $(e,f)\to T_Y(e\#f)$对于 Y 是一致连续的，这就是说对任意的 p，存在 q,C，对任意的 e,f 有

$$\|T_Y(e\#f)\|_{p,Y}\leqslant C\|e\|_{q,Y}\|f\|_{q,Y}.$$

这里 $\|\cdot\|_{p,Y}$ 是在适当空间中的第 p 个半范. 下面我们总以 W-Conf(g_l,Y,r)（赋有一列半范）表示这样一个象征的空间，其象征软禁在球 $U_{l,Y,r}$ 中.

定义 7.1.1 1) *l-软禁(在严格意义下)象征的空间 $\mathrm{Conf}(l,Y,r)$ 用递推式定义，即 $l=1$ 时由下式定义*

$$\mathrm{Conf}(1,Y,r)=\text{W-Conf}(g,Y,r),$$

当 $l=2,\cdots,k$ 时

$$\mathrm{Conf}(l,Y,r)=\mathrm{Conf}(l-1,Y,r)\hat{\#}\,\text{W-Conf}(g_l,Y,r)$$
$$\hat{\#}\,\mathrm{Conf}(l-1,Y,r).$$

2) *可以忽略的 l-软禁象征的空间 $\mathrm{Negl}(l,Y,r)$ 是空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n})$ 赋以如下一列半范：第 p 个半范等于*

$$\sum_{q+r=p}\lambda_l(Y)^q\|\cdot\|_r,$$

其中 $\|\cdot\|_r$ 是 $\mathrm{Conf}(l,Y,r)$ 的第 r 个半范.

3) *k-软禁(在广义的意义下)象征的空间 $\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)$ 定义为*

$$\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)=\mathrm{Conf}(k,Y,r)+\sum_{1}^{k+1}\mathrm{Negl}(l,Y,r),$$

并赋以和空间的典则半范(指标按自然数 $\mathbf{N}$ 重排).

定义中 2)不难理解：一族一致有界的可以忽略的象征 (a_Y) 是这样一族象征，它使得对所有 p，$(\lambda_l(Y)^p a_Y)$ 是一族一致有界的软禁象征.

空间 $\mathrm{Conf}(k,Y,r)$ 的伴随空间是一个由软禁象征作重复的 Weyl 运算所作成的"三明治"空间，我们将看到在这个空间上加上对前面的运算是可忽略的象征是很有用的，这就是定义中 3)的意义.

正如对于第一次微局部化一样，这里一个基本结果是对 $\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)\times\overline{\mathrm{Conf}}(k,Z,r)$ 的元素的双软禁的定理，必须预先递推地定义一个函数，当 Y 和 Z 相距很远时，这个函数可以估计出 $\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)\times\overline{\mathrm{Conf}}(k,Z,r)$ 的元素充分小.

定义 7.1.2 *当 $r<r_0$ 充分小时，函数 $\Delta_{l,r}(Y,Z)$ 递推地定义如下：*

1) *函数 $\Delta_{1,r}(Y,Z)$ 是相关于度量 g_1 的函数 $\delta_r(Y,Z)$.*

2) *对 $l=1,\cdots,k-1$，设*

$$\Delta_{l+1,r}(Y,Z)$$
$$=\begin{cases}\lambda_l(Y)\lambda_l(Z)\Delta_{l,r}(Y,Z), & \text{若 } g_{l,Y}(Y-Z)>Kr^2 \text{ 或 } g_{l,Z}(Y-Z)>Kr^2;\\ \inf\{\lambda_l(Y)\lambda_l(Z)\Delta_{l,r}(Y,Z);\ \delta_{r+1,r}(Y,Z)\}, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

常数 K 选得充分大，使得

$$\inf\{g_{l,Y}(Y-Z),g_{l,Z}(Y-Z)\}\geqslant Kr^2$$
$$\Rightarrow\lambda_l(Y)\leqslant C''\delta_{l,r}(Y,Z)^N.$$

这一距离的重要性完全类似于函数 δ_r：存在 C 和 N 使我们有

$$\sup_{Y\in\Omega_r}\int_{\Omega_r}\Delta_{k,r}(Y,Z)^{-N}\,|\,g_{k,Z}\,|^{1/2}\mathrm{d}Z<\infty,\tag{7.1.5}$$

$$g_{k,Y}(Y-Z)\geqslant Cr^2\Rightarrow\lambda_k(Y)<\Delta_{k,r}(Y,Z)^N.$$

现在可以陈述主要定理如下：

定理 7.1.3 *存在 $C>1$ 和 $r_0>0$，使得对 $r<r_0$ 和所有 N，映射*

$$(a,b)\to\Delta_{k,Cr}(Y,Z)^N a\,\#\,b,$$

$$\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)\times\overline{\mathrm{Conf}}(k,Z,r)\to\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,Cr)\times\overline{\mathrm{Conf}}(k,Z,Cr)$$

是连续的，且对 Y 和 Z 是一致的.

7.2 k-次微局部化

我们先考虑 k-微局部微分算子. 这种算子的定义和研究与我们在 5.4 节所作的十分类似，只是将与 g 相对的软禁换为 k-软禁. 我们从权函数的定义开始.

定义 7.2.1 *l 阶的权递推定义如下：1 阶的权是相对于 g_1 的权函数(见定义 5.1.2 与定义 5.1.5)，对 $l=2,\cdots,k$，l 阶的权是形如 $M(Y)m(Y)$ 的函数，其中 M 是 $l-1$ 阶的权，m 则满足以下条件：当 $g_{lX}(X-Y)\leqslant C^{-1}$ 时*

$$C^{-1}\lambda_{l-1}(Y)^{-N}\leqslant m(Y)\leqslant C\lambda_{l-1}(Y)^{N},$$

$$m(Y)/m(X)\leqslant C(1+g^{\sigma}_{lXY}(X-Y))^{N}.$$

最重要的 k 阶权是函数

$$\lambda_1(Y)^{s_1}\cdots\lambda_k(Y)^{s_k}.$$

可用归纳法证明 k 阶权的一个重要性质类似于(5.1.20)，即有

$$\frac{m(Y)}{m(X)}\leqslant C\Delta_{k,r}(X,Y). \tag{7.2.1}$$

定义 7.2.2 *设 M 是一个 k 阶权，r 小于定理 7.1.3 中的 r_0，若我们有*

$$A=\int_{\mathbf{R}^{2n}}M(Y)a_Y^w\,|\,g_{kY}\,|^{1/2}\mathrm{d}Y, \tag{7.2.2}$$

其中 a_Y 是 $\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)$ 中一族一致有界的可测元素，则称 A 是权 M 的有软禁半径 r 的 k-微局部微分算子，记为 $A\in O_r(M,k)$.

与以往第一次微局部化相反，在一般情形下，对于同一个算子 A 不可能得到形如(7.2.2)的分解使得软禁半径可以任意小. 由此引起的不便(特别对于复合运算)，促使我们导出具有参数的算子(定义 7.2.5).

定理 7.2.3 1) *$O_r(M,k)$的元素在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$和 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$上是连续的.*

2) *$O_r(1,k)$的元素在 $L^2(\mathbf{R}^n)$上是连续的.*

3) *若 C 和 r_0 是定理 7.1.3 中的常数，并且 $A\in O_r(M_i,k)$，$i=1,2$，其中 $r\leqslant r_0/C$，那么我们有*

$$A_1\circ A_2\in O_{Cr}(M_1M_2,k),\quad A_1^*\in O_r(M_1,k). \tag{7.2.3}$$

定理 7.2.3 的证明与定理 5.4.2 的证明完全相同，这里只需用双软禁定理 7.1.3 以及(7.2.1)代替 5.4 节中相应的定理即可.

为了将 $S(M,g_k)$中的元素量子化，按照上一节量子化原理中所表述的思想，我们需要投影子(与 r'，r 相关，这里 $0<r'<r<r_0$)，即以下类型的函数

$$\Pi_Y=\chi_{1,Y}\#\cdots\#\chi_{k-1,Y}\#\chi_{k,Y}\#\chi_{k-1,Y}\#\cdots\#\chi_{1,Y},$$

其中 $\chi_{l,Y}$是 $S(1,g_l)$中一族一致有界的元素，在以 Y 为圆心，r'为半径的 g_l 球 $U_{l,Y,r'}$的邻域中为 1，其支集在 $U_{l,Y,r}$中.

Π_Y 属于$\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)$，同样地，它是下面量子化中用到的"三明治". 另外，对任意 N，从$\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r')$到$\overline{\mathrm{Conf}}(k,Y,r)$的映射

$$a\to\lambda_k(Y)^N(\Pi_Y\#a-a)$$

和

$$a\to\lambda_k(Y)^N(a\#\Pi_Y-a)$$

对 Y 是一致有界的.

定义 7.2.4(**量子化**) *若 Π_Y 是上述一族投影子，且设(φ_y)是相对于 g_k 的单位分解(见引理 5.3.3)，其中 φ_Y 的支集在 $U_{k,Y,r'}$中，与这些相联系我们可以给出一个从 $S(M,g_k)$到 $O_r(M,k)$的映射 $a\to a^Q$，*

$$a^Q=\int\Pi_Y^w\circ(\varphi_Ya)^w\circ\Pi_Y^w\,|\,g_{kY}\,|^{1/2}\mathrm{d}Y. \tag{7.2.4}$$

像在 5.4 节中所作的那样，也可以反过来对形如(7.2.4)的 k-微局部微分算子 A 作出象征. 设$\{\chi_Y\}$形成 $S(1,g_Y)$中一族有界的元素，在 U_{k,Y,r_1}中为 1，在 U_{k,Y,r_2}外为 0，这里 $r<r_1<r_2<r_0$，令

$$\sigma_A=\int_{\mathbf{R}^{2n}}M(Y)a_Y\chi_Y\,|\,g_{kY}\,|^{1/2}\mathrm{d}Y.$$

其结果依赖于$\{\chi_Y\}$和 A 的写法，但仅只相差 $S(M\lambda_k^{-\infty},g_k)$的一个元，在此意义下它与这种写法是无关的，且有 $\sigma_{a^Q}\equiv a$. 在这一背景下同构定理的叙述总是不理想的：算子空间 $O_r(M,k)$事实上依赖于软禁半径 r，并且不是一个代数(原因是(7.2.3)中 $r\to Cr$ 的损失). 用以下概念将是方便的.

定义 7.2.5 *以 $\mathscr{O}(M,k)$表示族 $\mathscr{A}=(A_d)$(的芽)的空间，$\delta\in(0,\delta_0)$，使得*

1) *对属于 $O_{r(\delta)}(M,k)$的每个 A_δ 当 $\delta\to0$ 时有 $r(\delta)\to0$.*

2) *对所有 N，$A_\delta-A_{\delta'}\in O_r(M\lambda_k^{-N},k)$，其中 $r=\max\{r(\delta),r'(\delta)\}$.*

若对于和 δ 一起趋于 0 的值 $r=r(\delta)$，$r'=r'(\delta)$，Π_Y^δ，φ_Y^δ 满足定义 7.2.4 的条件，那么对每个充分小的 δ，我们有一个在 $O_{r(\delta)}(M,g_k)$

中的 $S_0(M,g_k)$ 的量子化 Q_δ，因而也有映射 $a \to \mathscr{A}=(a^{Q_\delta})$. 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是两个带参数的算子，我们用 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 表示 $(A_\delta \circ B_\delta)$ 的族，对充分小的 δ，这定义(定理 7.2.3)是合理的.

定理 7.2.6 1) *量子化的映射将 $S_0(M,g_k)$ 射到 $\mathscr{O}(M,k)$，且导出一个与 $\Pi_Y^\delta, \varphi_Y^\delta$ 的选择无关的、从 $S(M,g_k)/S(M\lambda_k^{-\infty},k)$ 到 $\mathscr{O}(M,k)/\mathscr{O}(M\lambda_k^{-\infty},k)$ 的一一对应. 我们记 $\mathscr{A}\to\sigma(A)$ 为"逆映射(象征)":*

$$\sigma:\ \mathscr{O}(M,k) \to S(M,g_k)/S(M\lambda_k^{-\infty},g_k).$$

2) $\mathscr{O}(M,k)$ 的集合，若以 k 阶权的群为下标，将构成一个梯级代数，且对伴随稳定.

3) 我们有 $\sigma(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})=\sigma(\mathscr{A})\,\widetilde{\#}\,\sigma(\mathscr{B})$，$\sigma(\mathscr{A}^*)=\overline{\sigma(\mathscr{A})}$，$\widetilde{\#}$ 是在(5.2.7)中定义的运算.

注 7.2.7 *用相空间的二重积分来定义象征的量子化同样是可以的：*

$$a^{\mathscr{Q}} = \iint \Pi_Y^w(\varphi_Y a \varphi_Z)^w \Pi_Z^w \mid g_Y \mid^{1/2} \mid g_Y \mid^{1/2} \mathrm{d}Y\mathrm{d}Z,$$

其中 Π 和 φ 如同上述，积分区域限制在一对点的邻域中，用定理 7.1.3 它可化为一个单积分.

现在我们首先整个地，然后微局部地定义与 L^2 和 k-微分计算相联系的空间 $H(M)$. 是否可能完全一般而不加条件地对 $H(M)$ 自然地配以一个 Hilbert 构造，并不总是很清楚的.

定义 7.2.8 *设 M 是一个 k 阶权，且 $\mu\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. 若对所有充分小的 r 和所有 $B\in O_r(M,R)$，有 $Bu\in L^2$，则说 $u\in H(M,k,\mathbf{R}^{2n})$ (或者记 $u\in H(M)$).*

由定义立即可知，若 $u\in H(M,k)$ 且 $\mathscr{A}=(A_\delta)\in\mathscr{O}(M,k)$，则对充分小的 δ 有 $A_\delta U\in H(M/M_1,k)$.

在应用中，最常见的度量 g_1 是 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\xi^2/(1+|\xi|^2)$. 第 k 次计算的基本目标是对通常的(拟)微分方程证明其解的微局部正则性. 这是十分重要的，一方面是由于通常算子是 k-微局部微分算子，另一方面是为把 $H(M,k)$ 的正则性提高到通常的微局部正则性.

定理 7.2.9 1) *若 M 是一个 $k-1$ 阶权，且 $\mathscr{A}\in\mathscr{O}(M,k-1)$，则 $\mathscr{A}\in\mathscr{O}(M,k)$. 进一步，若存在 $p,q\in\mathbf{R}$ 使得 $\sigma(\mathscr{A})\in S(M\lambda_{k-1}^{-p}\lambda_k^q, g_k)$，则 $\mathscr{A}\in\mathscr{O}(M\lambda_{k-1}^{-p}\lambda_k^q,k)$.*

2) 我们有 $\mathscr{O}(M\lambda_{k-1}^{-\infty},k-1)=\mathscr{O}(M\lambda_{k-1}^{-\infty},k)$.

下面是一个精巧而且基本的定理.

定理 7.2.10 *若 M 是一个 $k-1$ 阶权，则有*

$$H(M,k-1) = H(M,k).$$

证 $H(M,k-1)\subset H(M,k)$ 的证明是显然的，由包含关系 $\mathscr{O}(M,k-1)\subset\mathscr{O}(M,k)$ 可以得到. 现设 $u\in H(M,k-1)$，由象征计算我们可找到算子

$$\mathscr{P}\in\mathscr{O}(M^{-1},k-1);\ \mathscr{Q}\in\mathscr{O}(M,k-1);\ \mathscr{R}\in\mathscr{O}(\lambda_{k-1}^{-\infty},k-1)$$

使得

$$I = P_\delta Q_\delta + R_\delta.$$

若 $A\in O_r(M,k,V')$，其中 r 充分小，则可证明

$$Au = (AP_\delta)Q_\delta u + (AR_\delta)u \in L^2.$$

算子 AP_δ 属于 $O_{r'}(1,k)$ 且是 L^2 有界的，而由假设，$Q_\delta u\in L^2$. 算子 AR_δ 属于 $O_{r'}(M\lambda_{k-1}^{-\infty},k)$ 由前面的定理，包含在 $O_{r''}(M\lambda_{k-1}^{-\infty},k-1)$ 中，因而 $(AR_\delta)u\in L^2$，定理得证.

定义 7.2.11 (*k-微局部正则性*) *设 V 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的开集，且看做是所有使得 $V'\subset\subset V$ (对 g_k) 的 V' 的并，并设 $u\in H(M\lambda_{k-1}^{-\infty},k,\mathbf{R}^{2n})$. 若任给 $\mathscr{A}\in(A_\delta)\in\mathscr{O}(M,k,V)$，其象征 $\sigma(\mathscr{A})\in S(M,g_k)/S(M\lambda_k^{-\infty},g_k)$，且这个象征在 $V'\subset\subset V$ 之外为零，并对充分小的 δ 有 $A_\delta u\in L^2$，则称 u 在 V 中微局部地属于 $H(M)$，并记为 $u\in H(M,k,V)$.*

利用象征的计算马上可以给出以下结果. 一方面，只需对每个 $V''\subset\subset V$，找到如同上述的 $\mathscr{A}$，使 $\sigma(\mathscr{A})$ 在 V'' 中可逆，这就导出 $u\in H(M,k,V)$. 另一方面，若 $\mathscr{B}\in\mathscr{O}(M_1,k)$ 且 $u\in H(M,k,V)$，$V'\subset\subset V$，那么当 δ 充分小时有 $B_\delta u\in H(M/M_1,k,V')$.

注 7.2.12 *当权 M 具有 $\lambda_1^{s_1}\cdots\lambda_k^{s_k}$ 的形式时，我们称权 M 的算子*

为$(s_1,\cdots,s_k)$(多重)阶的算子. 同样地, 将空间$H(M,k)$记为$H^{s_1,\cdots,s_k}$.

于是定理7.2.10的重要结果可写为

$$H^{s_1,\cdots,s_{k-1}} = H^{s_1,\cdots,s_{k-1},0}.$$

定理7.2.9断定了$(m_1,\cdots,m_{k-1})$阶算子$\mathscr{A}$也是$(m_1,\cdots,m_{k-1},0)$阶算子, 或许$\mathscr{A}$是更好阶的算子(例如$(m_1,\cdots,m_{k-1}-1,1)$, 这时其象征$\sigma(\mathscr{A})\in S(\lambda_1^{m_1},\cdots,\lambda_{k-1}^{m_{k-1}-1},\lambda_k,g_k)$). 在这种情况下, 对$u\in H^{s_1,\cdots,s_{k-1}}$有$A_\delta u\in H^{s_1-m_1,\cdots,s_{k-1}-m_{k-1}+1,-1}$. 也有可能由$k$-微局部的象征计算证得形如$A_\delta u\in H^{s_1-m_1,\cdots,s_{k-1}-m_{k-1}+1}$的结果. 我们看到, 作第$k$次运算仅仅有可能得到$\lambda_k$的幂, 但这并不妨碍将这一正则性提升到前面的运算的正则性上去.

最后我们看一下Weyl量子化和标准量子化. 对一个好的象征可以用一个经典的公式从Weyl量子化$a\to a^w$得到标准量子化$a\to a(x,\mathrm{D})$, 即"将系数的相乘放到微分的左边". 令

$$J^+a(x,\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi),$$

我们有

$$a^w = (J^{1/2}a)(x,\mathrm{D}),\quad a(x,\mathrm{D}) = (J^{1/2}a)^w(x,\mathrm{D}).$$

由假设

$$g_{lY}(x,\xi) = g_{lY}(x,-\xi)$$

(对所有给出的度量的例子, 这个假设可以直接验证), 可证明[B-L]算子J^+是从空间W-Conf(l,Y,r)射到自身的连续映射.

于是有可能用标准的象征计算和复合法则写出上面的全部理论. 例如, 用定义7.2.4的记号, $O_r(M,k)$中的一个元素, 在相差一个权算子$M\lambda_k^{-\infty}$的意义下, 可写成如下形式

$$A \equiv \int \Pi_Y(x,\mathrm{D})\circ(\varphi_Y a)(x,\mathrm{D})\circ\Pi_Y(x,\mathrm{D})\mathrm{d}Y,$$

其中$a=J^{1/2}\sigma(A)$, Π_Y是形如$\chi_l(x,\mathrm{D})$的算子的三明治.

7.3 二次微局部化

二次微局部化的历史可追溯到20世纪70年代初. 最初的思想来自Kashiwara, 他用上同调的方法联系Lagrange流形引入了二次

微函数. 在同样框架下, Laurent [La]给出了二次微局部微分算子的象征计算. 对于解析正则性的情形, Sjöstrand [Sj1]和Lebeau [Le2]用完全不同的工具(F. B. I. 变换)导出了二次微局部化(也包括高次微局部化)的定义. 现在我们知道这两种处理方法都导致相同的解析波前集的概念.

我们在完全不同的框架下(C^∞函数, Sobolev型正则性)联系Lagrange子流形导出了二次微局部化. 我们最初的思想是系统地建立在Littlewood-Paley分解上的. 在这里我们将二次微局部化作为高次微局部化的一个特殊情况来介绍.

对于二次微局部化, 可以利用下列结果(希望这些结果能推广到更高次微局部化, 但现在尚不清楚): Fourier积分算子作用的不变性对非线性运算有相应结果. 这使我们能将所研究的问题扩展到相应于非平坦的Lagrange子流形的情形, 而不必回到7.2节所描述的框架. 尤其是我们可以证明二次微局部化奇性传播的定理, 这是非线性相互作用的结果的一个关键定理(尤其是三个波的相互作用).

7.3.1 原点处的二次微局部化

回到7.1.1, 这里g_1是一个常用的度量: $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\xi^2/(1+|\xi|^2)$, 而

$$g_2=\frac{1+\tilde{x}|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\mathrm{d}\xi^2}{1+|\xi|^2},$$

其中$\tilde{x}^2=\min\{|x|^2,1\}$ (对$|x|\geqslant1$, 度量g_1和g_2是一致的). 我们有

$$\lambda_1=(1+|\xi|^2)^{1/2},\quad \lambda_2=(1+\tilde{x}|\xi|^2)^{1/2}.$$

限于$\lambda_1^m\lambda_2^{m'}$型的权函数, 我们得到一类象征的定义:

$$a\in S^{m,m'}\Leftrightarrow |\mathrm{D}_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a|\leqslant C_{\alpha,\beta}\lambda_1^{m-|\alpha|+|\beta|}\lambda_2^{m'-|\beta|}.$$

一个重要的特殊情况是双齐象征. 设$a(x,\xi)$对ξ是p次齐次, 对x是q次齐次, 且当$|x||\xi|\neq0$时为C^∞类的. 用一个在区域$|x||\xi|\leqslant C^{te}$上为零的截断函数去乘$a(x,\xi)$, 就得到$S^{p-q,q}$中的一个元素, 在

相差 $S^{p-q,-\infty}$ 的意义下定义是有意义的.

因为 7.1.2 的条件得到满足，我们可以应用 7.1 节和 7.2 节中的所有结论：算子类 $O_r^{m,m'}$ 和 $\mathcal{O}^{m,m'}$ 及其象征的计算(定理 7.2.6).

按照 7.2 节中的定义，二次微局部 Sobolev 空间 $H^{m,m'}$，是指对任意的 $A\in O_r^{m,m'}$，$r<r_0$，$Au\in L^2$，现在可以有更精确的刻画. 这是因为在 $O_r^{0,1}$ 中有充分多的形如 x_iD_j，$i,j=1,2,\cdots,n$ 的算子.

命题 7.3.1 *设 $m\in\mathbf{R}$. 对整数 $m'>0$，我们有*

$$u\in H^{m,m'}\Leftrightarrow x^\alpha D^\beta u\in H^m,\ 0\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m'. \tag{7.3.1}$$

若 m' 是负整数，则有

$$u\in H^{m,m'}\Leftrightarrow \text{存在 } u_{\alpha,\beta}\in H^m,\ u=\sum_{0\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant|m'|}x^\alpha D^\beta u_{\alpha,\beta}. \tag{7.3.2}$$

对 $m'\geqslant 0$，$H^{m,m'}$ 的元素显然满足(7.3.1). 反过来，假设这一条件满足，并设 $A\in O_r^{m,m'}$. 由象征计算，我们可写出

$$A=\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m'}B_{\alpha,\beta}E_m x^\alpha D^\beta+B_0,$$

其中 E_m 是通常的 m 阶拟微分算子；$B_{\alpha,\beta}$ 是 $(0,0)$ 阶的，因此在 L^2 上有界；B_0 是 $(m,-\infty)$ 阶的，它将 H_m 射到 L^2. 因此我们可推出 $Au\in L^2$，即 $u\in H^{m,m'}$.

至于 $m'<0$ 的情况，显然由(7.3.2)可得到 $u\in H^{m,m'}$. 反过来，若对所有 (m,m') 阶的 A，我们有 $Au\in L^2$，由象征的计算，不难构造与 A 有同样阶数的 $A_{\alpha,\beta}$，且有

$$I=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m'}x^\alpha D^\beta E_{-m}A_{\alpha,\beta}u+Ru,$$

其中 E_{-m} 是 $-m$ 阶的拟微分算子，R 是 $(0,-\infty)$ 阶的. $E_{-m}A_{\alpha,\beta}u$ 和 Ru 属于 H^m，这样就证得结果.

注 7.3.2 不难导出 $H^{m,m'}$ 与 $H^{-m,-m'}$ 之间的对偶. 当涉及非整数的 m' 时，可以证明 $H^{m,m'}$ 的定义与在[Bon2]中所给出的是一致的，其方法是用 Littlewood-Paley 分解：

$$2^{jm}\|(1+2^j|x|)^{m'}u_j(x)\|_{L^2}\leqslant C_j,\quad \sum_j C_j^2<\infty.$$

这里不需用 $E_m x^\alpha D^\beta$ 的形式分解 $A\in O^{m,m'}$，而用算子

$$\sum_{k\leqslant j}2^{jm}2^{(j-k)m'}\varphi(2^{-j}|D|)\varphi(2^k|x|)$$

去做. 由此容易导出一系列的 $H^{m,m'}$ 相对于复插值是稳定的.

7.3.2 特殊的量子化和非线性性质

我们将充分利用把所有算子 a^w 写成 $a_1(x,D)$ 的可能性. 这里，a 限制于一个球中，a_1 也限制在同一球中. $a_1(x,D)$ 是 a_1 的标准量子化，或者将 a^w 写成 $[a_2(x,D)]^*$.

设 $a(x)$ 在原点外是一个 C^∞ 函数，且为 k 次齐次的(或更一般地满足 $\partial^\alpha a\leqslant C_\alpha|x|^{k-\alpha}$). 这样一个函数在 $|x||\xi|\leqslant C^\kappa$ 中截断，将定义 $S^{-k,k}$ 的一个元素，我们要写出 $O^{-k,k}$ 的一个以 a 为象征的特殊元素.

引进单位分解

$$1=\int_{\mathbf{R}^{2n}}\varphi_Y(x)\psi_Y(\xi)\mathrm{d}Y/\lambda_2(Y)^n,$$

这里 φ (或者 ψ)的支集包含在以 y (或 η)为中心的球中，其半径为 $r\lambda_2/\lambda_1$(或 $r\lambda_1$)，函数 $\alpha_Y(x)$ 和 $\beta_Y(\xi)$ 分别在一球上等于 1，这球也以 y (或 η)为中心，以 $2r$ (或 $2r\lambda_1$)为半径，并且函数的支集分别包含在相应的半径为 2 倍的球中，以量子化利用重积分(注 7.2.7)我们可导出以下公式：

$$a^Q\equiv\iint_{|x||\xi|\geqslant C^\kappa,\ |y|\geqslant C^\kappa}\alpha_Y(x)\beta_Y(D)\psi_Y(D)\varphi_Y(x)a(x)\varphi_Z(x)\cdot\psi_Z(D)\beta_Z(D)\alpha_Z(x)\mathrm{d}Y/\lambda_2(Y)^n\mathrm{d}Z/\lambda_2(Z)^n,$$

它也可写作

$$a^Q\equiv\Pi^*a\Pi\quad(\mathrm{mod}\ O^{-k,-\infty}), \tag{7.3.3}$$

注意到 $\psi_Z\beta_Z=\psi_Z$，算子 Π 可定义为

$$\Pi=\int_{|Z||\xi|\geqslant C^\kappa}\varphi_Z(x)\psi_Z(D)\alpha_Z(x)\mathrm{d}Z/\lambda_2(Z)^n.$$

我们再看文[Bon2]中引入量子化模式的一种变化形式，在那里算子

Π（扁平算子）用 Littlewood-Paley 分解的记号定义为

$$\Pi=\sum_{p\leqslant q}\varphi(2^{p}x)\varphi(2^{-q}\mathrm{D}).$$

在这两种情形下，最重要的一点是存在 a 的这样一种量子化，首先它是将一个真正的乘法用 Π 和 Π^{*} 如同“三明治”一样夹着，其次还有 Π 的压扁性质（下面定理 7.3.4），即：u 越是正则，则 Πu 在原点越是平坦．最后这一性质可由 Π 的积分只取在 $|Z||\xi|\geqslant C^{te}$ 上，以及乘法运算是在微分运算的左边导出．

定义 7.3.3（加权的 Sobolev 空间） 设 $s\geqslant 0$，$s+s'\geqslant 0$，用 $SP(s,s')$ 表示 L^{2} 的一个子空间，当 $s+s'$ 为整数时，它满足

$$u\in H_{\mathrm{loc}}^{s+s'}(\mathbf{R}\backslash 0),\ |x|^{-s+\lambda}\mathrm{D}^{\lambda}u\in L^{2}\ 对\ 0\leqslant|\lambda|\leqslant s+s'；$$

当 $s+s'$ 为分数时，则用复插值来定义．

我们有 $SP(s,s')\subset H^{s+s'}$．另外，若 $s>n/2$ 且 $s+s'>n/2$，则空间 $H^{s,s'}$ 是一个代数，且 $SP(s,s')$ 是它的一个理想．

定理 7.3.4 设 $s\geqslant 0$ 且 $s+s'\geqslant 0$．

1）Π 映 $H^{s,s'}$ 到 $SP(s,s')$，且 Π^{*} 映 $SP(s,s')$ 到 $H^{s,s'}$．

2）$E=I-\Pi$ 映 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s,\infty}$，且 $F=I-\Pi^{*}$ 映 $SP(s,s')$ 到 $H^{s,\infty}$．

在[Ban2]中有这些性质的证明，当向量场代替象征为线性的二次微局部微分算子时，在推导类似于乘积求导的 Leibniz 公式和复合函数求导公式时这些性质起了重要作用．

定义 7.3.5 我们称 $O^{0,1}$ 的元素 Z 为奇异的向量场，其象征（标准的量子化，且可相差 $O^{0,-\infty}$）具有以下形式

$$Z(x,\xi)=\sum_{j}a_{j}(x)(\mathrm{i}\xi_{j}),$$

其中 a_{j} 在原点处是 C^{∞} 的，且满足

$$|\partial^{\alpha}a_{j}(x)|\leqslant C_{j,\alpha}|x|^{1-\alpha}.$$

对以下公式中出现的不寻常的项不应该感到意外，当 Z 是一个 C^{∞} 向量场与一个无限正则的算子的和时，它们有相当的项．

定理 7.3.6（Leibniz 公式） 若 u 和 v 属于 $H^{s,s'}$，且 $s>n/2$，$s+s'>n/2$，又 Z 是一个奇异向量场，f 是两个变量的 C^{∞} 函数，那

么存在 $(0,0)$ 阶的算子 E_{i}（依赖于 u 和 v），使得

$$\left.\begin{aligned}Z(u,v)&\equiv uZv+vZu+E_{1}u+E_{2}v\quad(\mathrm{mod}\ H^{s,\infty}),\\ Zf(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial u}Zu+\frac{\partial f}{\partial v}Zv+E_{1}u+E_{2}v\quad(\mathrm{mod}\ H^{s,\infty}).\end{aligned}\right\}\tag{7.3.4}$$

由（7.3.3）可知，若把一个真正的向量场 $\sum a_{j}\partial_{j}$ 记作 $\widetilde{Z}$，我们有 $Z=\Pi^{*}\widetilde{Z}\Pi\ (\mathrm{mod}\ O^{0,-\infty})$．因此由定理 7.3.4 有

$$Z(u,v)\equiv\widetilde{Z}\Pi(u,v)\quad(\mathrm{mod}\ H^{s,\infty}).$$

此外我们有

$$\begin{aligned}uv&=\Pi(uv)+E(uv)\\&=(\Pi u)(\Pi v)+(Eu)(\Pi v)+(\Pi u)(EV)\\&\quad+(Eu)(Ev).\end{aligned}$$

右边前面三项的和由定理 7.3.3 知属于 $SP(s,s')$．这些和与 $\Pi(uv)$ 的差应属于 $SP(s,s')\cap H^{s,\infty}=SP(s,\infty)$．因此我们有

$$Z(uv)\equiv\widetilde{Z}\{(\Pi u)(\Pi v)+(EU)(\Pi v)+(\Pi u)(Ev)\},$$

$$Z(uv)\equiv(\widetilde{Z}\Pi u)v+u(\widetilde{Z}\Pi v)+(\widetilde{Z}Eu)\Pi v+(\widetilde{Z}Ev)\Pi u.$$

可以看出在右边要得到量 $uZv+vZu$，还必须补充形如 $(\widetilde{Z}Eu)\Pi v$ 以及 $(Zu-\widetilde{Z}\Pi u)v\equiv(Zu-\widetilde{Z}\Pi u)\Pi v$ 的项．这些项都是 $a\Pi v$ 形的，其中 $a\in H^{s,\infty}$ 且 $\mathrm{D}^{\lambda}a\leqslant C_{\lambda}|x|^{-\lambda}$．若 $A\in O^{0,0}$ 以 a 为象征，算子 $a\Pi-A$ 映射 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s,\infty}$，这就得到结果．

注 7.3.7 给定一簇奇异向量场 $\mathscr{Z}$，我们可像第 4 章那样定义空间 $H^{s,s'}(Z,k)$，其特征是

$$Z_{1}\circ\cdots\circ Z_{l}u\in H^{s,s'},\quad Z_{j}\in\mathscr{Z},\ l\leqslant k,\tag{7.3.5}$$

由 Leibniz 公式，我们立刻得到相应于定理 2.2.2 的结果：对 $s>n/2$，$s+s'>n/2$，这一空间对于 $f\in C^{\infty}$，$u\to f\circ u$ 是一个稳定的代数．

7.3.3 与 Lagrange 子流形相联系的二次微局部化

在[Bon2]中我们给出了二次微局部微分算子的下列特征，在此框架下它们与 R. Beals 关于拟微分算子的相应定理是等价的．

定理 7.3.8 *若 A 是一个 C^∞ 到 C^∞ 的算子，且具紧支集，则以下两个性质等价：*

1) 对所有充分小的 r，$A=A_0+R$，其中 $A_0\in O_r^{m,m'}$，R 映 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s-m,s'-m'}$.

2) 多重交换子

$$(\mathrm{ad}\, D)^I(\mathrm{ad}\, M_x)^J A \qquad (7.3.6)$$

映 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s-m-|I|+|J|,s'-m'+|I|}$. 记号 M_x 表示用函数 x_j 相乘的算子集合.

此外，若 $\sigma_{m,m'}$ 是一个从 $O^{m,m'}$ 到 $S^{m,m'}$ 的梯级映射，将 D_j 和 M_{x_j} 在分别可相差 $S^{1,-1}$ 和 $S^{-1,0}$ 的意义下射到它们通常的象征(指标准的量子化)，且使得

$$\sigma(A\circ B)=\sigma(A)\sigma(B),\quad \sigma([A,B])=\frac{1}{i}\{\sigma(A),\sigma(B)\}$$

(可相差一个减少了$(0,1)$阶的象征)，那么对 $A\in O^{m,m'}$，A 的象征与 $\sigma(A)$ 仅相差 $S^{m,m'-1}$ 中的一个元素.

由此定理一方面可立即得到二次微局部微分算子在可逆 Fourier 积分算子(0 阶)下之不变性，此 Fourier 积分算子与一个使原点的余法丛不变的典则变换 χ 相并；另一方面又可立即得出 $F^{-1}\circ A\circ F$ 的象征与 $\sigma(A)\circ\chi$ 在相差一个低$(0,1)$阶的象征的意义下相等. 显然，若交换子关系(7.3.6)(它等价于所有拟微分算子的交换关系)对 A 成立，则对 $F^{-1}\circ A\circ F$ 亦成立. 另外，映射 $A\to\sigma(F^{-1}\circ A\circ F)\circ\chi^{-1}$满足定理 7.3.8 的条件，因此，除若干低双阶项外，它与 $\sigma(A)$ 相等.

这一定理是与 Lagrange 流形 Λ 相关的二次微局部微分算子定义的基础，除非 Λ 是仿射的，这一理论在前两节的框架下是没有的(那里象征用一个度量定义).

我们(微局部地)引入一族 0 次齐次函数$(m_1,\cdots,m_n)$，它们生成的象征在 Λ 上为零，随后我们把 Sobolev 空间 $H_\Lambda^{m,m'}$(首先让 m，m'是整数阶)定义为

$$Z^I M^J u\in L^2,\quad |I|\leqslant m,\ |J|\leqslant m',$$

其中 Z_j 是向量场，M_j 是 0 阶拟微分算子，其象征为上述的 m_j.

下面我们仿照性质(7.3.6)来定义一类二次微局部算子 $O^{m,m'}$：称一个算子 A 属于 $O^{m,m'}$，若算子$(\mathrm{ad}\, Z)^I(\mathrm{ad}\, M)^J A$ 将 $H^{s,s'}$ 映到 $H^{s-m-|I|+|J|,s'-m'+|I|}$.

与变 Λ 为原点的余法丛的典则变换相联系的是 0 阶可逆 Fourier 积分算子. 通过共轭也可将这两种情况的二次微局部微分算子互变. 最后，由象征的计算，我们得到由 $O_\Lambda^{m,m'}$ 到空间 $S_\Lambda^{m,m'}$ 的主象征的映射. 这一象征空间由条件

$$|H_z^I H_m^J a|\leqslant C^{\prime\prime}(1+|\xi|)^{m+|I|-|J|,m'-|I|}$$

定义在 Λ 的邻域中，其中 H_z 和 H_m 是上述象征的 Hamilton 场.

注 7.3.9 *在文[Bon2]中可找到更一般的算子使二次微局部微分计算不变. 若 χ 是保持原点不动的 $\mathbf{R}^n$ 中的微分同胚且它限制在 0 的余集上是一次齐次的微分同胚(或者其导数满足同样类型的估计)，容易看到 χ 可通过复合作用在相对于原点的二次微局部象征上，我们可以定义运算 $u\to\chi^* u$，它保持二次微局部正则性不变，同时通过共轭可定义一个作用于二次微局部微分算子上的运算，这一运算与象征的作用相容.*

更一般地，我们可定义沿 Λ 有奇性的典则变换，将两个 Lagrange 流形 Λ 和 Λ'互变，与其相联系，可定义与沿 Λ 和 Λ'的二次微局部化相容的奇异 Fourier 积分算子.

7.4 二次微局部化的应用

在本节，作为二次微局部化的应用，我们首先讨论二次微局部奇性的传播定理，然后以此为基础研究三个波的相互作用.

7.4.1 二次微局部奇性的传播

下面研究实主型的拟微分算子在一个较低阶的双阶二次微局部(相对于 Lagrange 子流形 Λ)算子的扰动下奇性的传播. 这一问题仅对与 Λ 相交的次特征提出. 我们从典型的情况着手，这时算子是

$\partial/\partial x_1$，而 Lagrange 流形是原点的余法丛 Λ_0，然后用象征计算和 Fourier 积分算子的共轭将它化为一般情况.

首先在这简单情形下描述与 Λ_0 相联系的二次微局部的正则性. 设 $u\in\mathscr{S}'$，且在$(0,\xi_0)$的邻域中微局部地属于 $H^{s,-\infty}$. 若 $\delta x_0\in\mathbf{R}^n\backslash 0$，说分布 u 在$(0,\xi_0,\delta x_0)$二次微局部地属于 $H^{s,s'}$，是指存在 $\varphi(x)\in C_0^\infty$ 且 $\varphi(0)\neq 0$，以及存在零阶的在原点外为 C^∞ 的函数$\chi(\xi)$和 $\theta(x)$，它们满足 $\chi(\xi_0)\neq 0$，$\theta(\delta x_0)\neq 0$，且使得对 $O_r^{0,0}$ 中以 $\theta(x)\chi(\xi)$为象征的元素 A，有 $A(\varphi u)\in H^{s,s'}$.

事实上，在这一情形下，用 V 和 W 分别表示 ξ_0 和 δx_0 的充分小的锥邻域，ω 是 0 的小邻域，对所有属于 $O_{r'}^{0,0}$，$r'<r$，且其象征在$(\omega\cap V)\times W$ 外为零的算子 B，由象征的计算可得到一个分解 $B=QA+R$，其中 Q 和 R 的阶分别为$(0,0)$和$(0,-\infty)$. 因此，由在开集$(\omega\cap V)\times W$ 上微局部正则性的定义 7.2.11，我们有 $Bu\in H^{s,s'}$.

我们考虑$\partial/\partial x_1$ 的出自 Λ_0 的次特征，即由 $x'=0$，$\xi=(0,\xi_0')$定义的次特征，这里 ξ_0'是固定的，x_1 是变化的. 对此我们有以下结果.

定理 7.4.1 设 $u\in H^{s,-\infty}$，且在$(0,\xi_0)$处微局部地有 $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\in H^{s-1,s'+1}$.

1)（入射的次特征）若 $s'>-1/2$ 且 u 在点 $x=(-\varepsilon,0)$，$\xi=\xi_0$ 微局部地属于 $H^{s+s'}$，那么 u 在点 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x=(-1,0)$二次微局部地属于 $H^{s,s'}$.

2)（第二次特征）若 $s'\in\mathbf{R}$，且在点 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x=(-1,\varepsilon\nu')$（$\nu'\in S^{n-2}$），$u$ 二次微局部地属于 $H^{s,s'}$，那么在点 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x=(1,\varepsilon\nu')$二次微局部地属于 $H^{s,s'}$.

3)（出射的次特征）设 $s'<-1/2$，在所有 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x=(1,\varepsilon\nu')$的点，其中 ν'跑遍 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中单位球面，而 ε 充分小，u 二次微局部地属于 $H^{s,s'}$，那么 u 在点 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x=(1,0)$二次微局部地属于 $H^{s,s'}$，特别是在点 $x=(\varepsilon,0)$，$\xi=\xi_0$ 微局部地属于 $H^{s+s'}$.

证明见[Bon2]，其思想如下：用压扁算子 Π 和 Littlewood-Paley 分解，将其转化成在加权的 Sobolev 空间中类似结果的证明. 对相对于 x_1 的积分算子的估计基本上转化成出现临界指标的 Hardy 不等式(除了在情况 2)更简单外).

我们现在考虑算子$\partial/\partial x_1+R$，其中 R 是双阶$(1,-1)$的，我们还作以下假设

$$\sigma(R)\in S^{0,0}+S^{1,-2}\text{，二次微局部地在 } x=0,\quad \xi=\xi_0,\ \delta x=(\pm 1,0)\text{ 附近.}\tag{7.4.1}$$

在这一假设下，对所有 N，有可能在 $x=0$，$\xi=\xi_0$，$\delta x\in S^{n-1}$的每个点邻域中二次微局部地构造一双阶$(0,0)$算子 E，使得

$$E\circ\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+R\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\circ E\in O^{1,-N}.$$

这是一个纯粹的象征计算问题，它可转化成解$\partial e/\partial x_1=\cdots$.

若将$\partial/\partial x_1$ 用$\partial/\partial x_1+R$ 代替，则定理 7.4.1 的结论仍成立而无须改变一个字. 作一小的让步，我们可对 $s'=-1/2$ 同时用 1)和 3)，这样就有以下结论.

推论 7.4.2 设 R 满足(7.4.1)，且 $u\in H^{s,-\infty}$，$\partial u/\partial x_1+Ru$ 在$(0,\xi_0)$微局部地属于 $H^{s-1,1/2}$. 若 u 在点 $x=(-\varepsilon,0)$，$\xi=\xi_0$ 微局部地属于 $H^{s-1/2}$，那么在点 $x=(\varepsilon,0)$，$\xi=\xi_0$ 处对所有 $\sigma<s-1/2$ 微局部地有 $u\in H^\sigma$.

下面仅剩下确定可以由 Fourier 积分算子变换为前面情况的状态. 一般的结果如下.

给定一个 Lagrange 流形(齐次的) Λ 和一个 m 阶的实主型拟微分算子 P. 我们设 Λ 和特征流形 $p_m^{-1}(0)$在它们的某一个交点(x_0,ξ_0)附近是横截的. 我们又设在这点附近 $\mathrm{d}p_m$ 限制到 Λ 上是非退化的，这导致 p_m 的 Hamilton 向量场在(x_0,ξ_0)附近是横截于 Λ 的. 我们用 γ 表示通过这点的次特征.

若 R 是双阶的二次微局部微分算子，其象征在点 $x=x_0$，$\xi=\xi_0$，$(\delta x,\delta\xi)=\pm H_{p_m}(x_0,\xi_0)$附近二次微局部地属于 $S_\Lambda^{m-1,0}+S_\Lambda^{m,-2}$（这里最后一个向量属于 $T(T^*\mathbf{R}^n)$对 $T(\Lambda)$的商）. 设 $u\in H^{s,-\infty}$，且

在(x_0,ξ_0)微局部地有 $Pu+Ru\in H^{s-1,1/2}$. 若 $u\in H^{s-1/2}$ 微局部地在以 Λ 为界的半次特征 $\gamma^{\pm}$ 的一支上，那么我们的结论是在另一支上微局部地有 $u\in H^{\sigma}$，这里 $\sigma<s-1/2$.

在这框架下，容易对定理 7.4.1 作相同的陈述，第二次特征确切地存在于 $T(T^*\mathbf{R}^n)/T(\Lambda)$中，并在点$(\delta x,\delta\xi)=\pm H_{p_m}$与真正的次特征相连接. u 的(s,s')阶波前集自然地定义在 $T^*\mathbf{R}^n$ 沿 Λ 的锥子集合中，即在$(T^*\mathbf{R}^n\backslash\Lambda)\cup(T(T^*\mathbf{R}^n)/T(\Lambda))$中.

7.4.2 在三个波相互作用中的应用

现在，我们简单地介绍用前面的结果来研究三个波相互作用的总体思想. 同样的结论已由 Melrose-Ritter [M-R1]独立地得到，更一般的结论和改进由 Chemin [Chem3]和 Sà Baretto [SB2]得到(后面一节将具体叙述).

考虑二维空间的半线性波方程

$$\Box u=f(t,x,y,u), \tag{7.4.2}$$

其中$\Box=\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_y^2$，且 f 是 C^∞ 的实函数.

给定一个解 $u\in H^s(\Omega)$，$s>3/2$，且像 3.1 节一样，并用同样记号假定 Ω_+ 在 Ω_- 的影响区域中.

给出三个特征曲面 Σ_1,Σ_2 和 Σ_3，它们横截地交于 Ω_+ 中的一个点 O，用 Γ^+ 表示从 O 发出的向前的半波锥，那么有以下结论(见[Bon2],[Bon4]).

定理 7.4.3 *在 Ω_- 中假设当 $\sigma>3/2$ 时，方程(7.4.2)的解 u 在 Σ_j 外属于 $H^{\sigma+k}$，在 $\Sigma_i\cup\Sigma_j$ 附近属于 $H^{\sigma,k}(\Omega_-,\Sigma_i\cup\Sigma_j)$，那么对所有 $\sigma'<\sigma$，有*

1) *u 在$(\bigcup_j\Sigma_j)\cup\Gamma^+$外属于 $H^{\sigma'+k}$；*

2) *在 $\Sigma_j\backslash(\bigcup_{i\neq j}\Sigma_i\cup\Gamma^+)$附近 $u\in H^{\sigma',k}(\Omega,\Sigma_j)$；*

3) *在 $\Gamma^+\backslash(\bigcup_j\Sigma_j)$附近 $u\in H^{\sigma+\tau,k-\tau}(\Omega,\Gamma^+)$，其中 $\tau=\min\{k,[\sigma+1-3/2]\}$，记号$[a]$表示 a 的整数部分.*

下面我们展示了这种相互作用现象在三个不同时刻的三个画面

(见图 2). Rauch 和 Reed 的例子表明了在 Γ^+ 上确定有新的奇性产生.

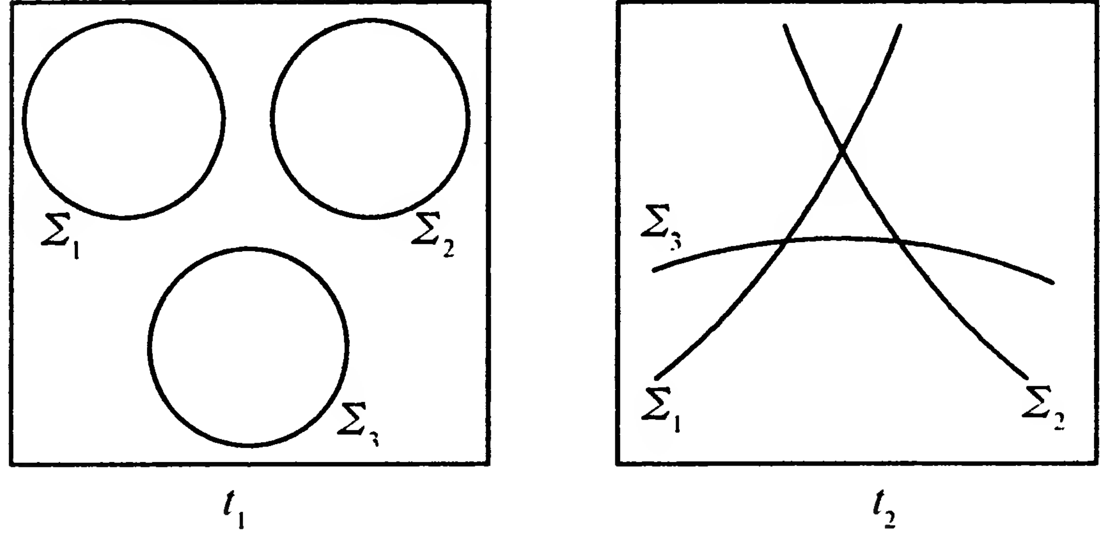


图 2

证明的思想是模仿第 4 章中处理一个或两个波时的方法，一旦导出相切的向量场集合的生成元族(Z_j)，以及向量值函数 $U_k=(Z^I u)_{|I|<k}$，我们立刻会碰到以下问题：不可能把交换子$[\Box,Z_j]$表为$\Box$与 Z_j 的组合(以拟微分算子为系数)，但在余法分布空间的证明中为得到的一个好的方程这是一个关键条件，这一现象的产生是由于几何情况更复杂：切向量场在奇异点附近很平，而交换子则是不那么平的算子，从而使得交换的性质不能满足.

反过来，若我们把与 Σ_j 和 Γ 相切的向量场用有同样性质的奇异向量场(在定义 7.3.5 意义下)来代替，这困难就没有了. 我们可以找到一族生成元(还是记作 Z_j)，使得有

$$[\Box,Z_j]=\sum A_{j,i}Z_i+B_j\Box+A_{j,0}, \tag{7.4.3}$$

其中 $A_{j,i}$和 $A_{j,0}$的双阶为$(2,-1)$，B_j 的双阶为$(0,0)$，且对于满足

$$\tau^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \frac{\delta x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{h} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \tag{7.4.4}$$

的点$(0;\tau,\xi,\eta;\delta t,\delta x,\delta y)$附近二次微局部地有

$$\left.\begin{aligned} \sigma(A_{j,i}),\sigma(A_{j,0}) \in S^{1,0} + S^{2,-2}, \\ \sigma(B_j) \in S^{0,-1} + S^{-1,1}. \end{aligned}\right\} \tag{7.4.5}$$

这是一个典型的象征计算问题. 我们容易看到，在每个点的邻域里，可以二次微局部地得到真正的向量场作为生成元，从而得到关系式(7.4.3)，其中 $A_{j,i}, B_j$ 是微分算子，它们满足(7.4.5). 再用一个与象征相联系的二次微局部的单位分解，总可假设象征在(7.4.4)所描述的球带上为常数，这就导出结果.

下面仅需重复用第 4 章讨论余法分布奇性所采用的方法. 由交换性，通过递推可得到下面的向量方程

$$\Box U_k + R_k U_k = F_k,$$

其中 R_k 是一个$(2,-1)$阶的算子矩阵，而且其象征满足(7.4.4)，(7.4.5). 剩下只需递推地对 $\sigma < s$ 证明 $U_k \in H^{\sigma,-1/2}$. 由 Leibniz 公式，可由 $k-1$ 时的性质得到 $F_k \in H^{\sigma-2,1/2}$. 从 U_k 在过去某时刻的正则性开始，由二次微局部的奇性传播定理可导出 $U_k \in H^{\sigma,-1/2}$，从而结论成立.

7.4.3 关于相互作用的其他结果

上述定理 7.4.3 也被 Melrose-Ritter 独立证得. 而后，Beals 又用不同的方法重新证明了类似的结果. Chemin 还将这些结果扩展到以下方程的情形：

$$\Box u = f(t,x,y,u,\nabla u). \tag{7.4.6}$$

这里的困难在于非线性的一阶项在传播中所起的作用，证明的重要一点是关于形如$\Box + R$ 的算子的奇性传播定理，这里 R 是一个二次微局部算子和一个仿乘积算子之积.

Melrose, Ritter 和 Sà Baretto 在处理这一问题时发展了一种完全不同的方法. 其基本思想是对于一个包含 n 个超曲面的构形定义空间

$$I_k L^2(\mathscr{Z}) = \{u \in L^2;\ Z^I u \in L^2,\ Z_j \in \mathscr{Z},\ |I| \leqslant k\},$$

其中 $\mathscr{Z}$ 由确定的向量场构成，这些向量场在 Σ 外是 C^∞ 类的. 一个好的选择是找一个解除奇性的、将 $\mathbf{R}^n \setminus \Sigma$ 同构于一个正常交叉因子的余集，并使 $\mathscr{Z}$ 的元素是对应于这因子的切向量场的像，这一空间的函数可以说在很强的意义下是余法的.

这两种观点的关系是十分清楚的(至少从迄今处理过的例子来看)：这些向量场的象征都是 k 次微局部微分算子的象征，其中逐步解除奇异性的过程反映了适当的度量的选取过程. 而且可以证实，空间 $I_k L^2$ 正是前面记作 $H^{0,0}(\mathscr{Z},k)$的空间(见注 7.3.7). 例如，下述两种情况就需要 7.1 节的第三微局部化，此时分别有 $p=2$ 和 $p=3/2$.

如果证明 $L^\infty \cap I_k L^2(\mathscr{Z})$是一个代数不很困难，则用这一空间(当然此时假设 Σ 是一个特征)来刻画正则性的传播就不会有问题，在好的情形下，$I_k L^2$ 可以写成与更简单的几何形状相联系的空间的和，对每一个这样的空间我们可以借助于向量场来研究传播.

例如，在两个超曲面 Σ_1 和 Σ_2 沿着 Γ 简单相切的情形，上述空间可写成和 $I_k L^2(\mathscr{Z}_1) + I_k L^2(\mathscr{Z}_2)$的形式，这里 $\mathscr{Z}_j$ 表示一个与 Σ_j 和 Γ 相切的 C^∞ 向量场. 在[M-R2]中，Melrose-Ritter 还证明了方程(7.4.2)的有界解若在某时刻前属于 $I_k L^2(\mathscr{Z})$(相对于特征面 Σ_1 和 Σ_2)，则在这时刻后也属于同一空间，

当 Σ 是一个具有尖点曲线的曲面时，Melrose 在[Mel2]得到了一个类似的结果.

Sà Barreto 在[SB2]中证明了方程 5.12 的三个波相互作用的一个值得注意的结果. 不论在情形(1)即上述三个曲面 Σ_1, Σ_2 和 Σ_3 横截相交，还是在情形(2)即 Σ_1 与 Σ_2 简单切于一条与 Σ_3 横截相交的曲线，他证明了以下结果：如果解在某时刻前在强意义下是余法的(这里是指在情形(1)是通常的余法的，但在情形(2)不是)，那么它们在这时刻后相对于 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Gamma$ 也在强意义下是余法的.

7.4.4 Cauchy 问题

当问题具有余法初始数据时，有一些关于二次微局部化的结

果，事实上是与以上结果相类似的. 当 Cauchy 数据的奇性在 $\mathbf{R}^2$ 的 p 条两两横截于一点的曲线上时，通过每条曲线 C_j 有两个特征面 $\Sigma_{j,1}$和 $\Sigma_{j,2}$. 以 Γ 表示从交点发出的波锥. 设 u 是非线性波方程(7.4.1)的属于 $H^s(s>3/2)$的解. 我们假定两个 Cauchy 数据分别属于相对于 $\bigcup C_j$ 的余法分布空间 $H^{s,\infty}_C$ 和 $H^{s-1,\infty}_C$，那么Bony 在[Bon3]中证明了其解 u 在 $\Sigma_{j,l}$和 Γ 的并集外属于 C^∞，且对这并集光滑的部分是余法的.

当 Cauchy 数据的奇性在一个点上，Chemin 在[Chem4]中考虑完全非线性的方程

$$F(x,u,\nabla u,\cdots \nabla^m u) = 0.$$

当解 u 的 Cauchy 数据相对于原点是余法的，且假设线性化方程在原点“冻结”后得到的常系数方程是严格双曲的，在原点外有一光滑的波锥，由原点出来的零次特征线产生一超曲面 Γ,在原点切于这锥. 应用二次微局部化，以及像 4.6.1 那样用迭代的方式来定义正则性，[Chem4]证明了 Γ 在原点外是 C^∞ 的，解 u 在 Γ 外是 C^∞ 的，且在原点外 Γ 附近是余法的.

7.4.5 在解析框架下相互作用的一般结果

在对几何结构作了解析的假设后，Lebeau 和 Delort 给出了比前面所述要完整得多的结果.

第一个结果[Le1]是关于(7.4.2)的解，其 Cauchy 数据上相对于解析 Lagrange 子流形的 Fourier 积分(经典的)分布. 对每个 $\sigma\in \mathbf{R}$，存在一个次解析迷向集(其正则性部分是 Lagrange 的) L_σ，使得微局部地在 L_σ 外有 $u\in H^\sigma$. 特别地，若 L_σ 对时间空间的投射的余维数$\geqslant 1$，则解在一几乎处处稠密的开集上属于 H^σ.

Lebeau 的第二个结果[Le2,4]是关于方程

$$\Box u=f(t,x,u,\nabla u)$$

的，其中 $x\in \mathbf{R}^d$. 设已给一个解 $u\in H^s(\Omega)$，$s>(d+2)/2$，其 Cauchy 数据相对于 $\mathbf{R}^d$ 中的一个实解析光滑超曲面 V 是余法的. 那么存在一个由 V 所确定的 $T^* C^{d+1}$ 中的子序列组成的子集合 $\mathscr{E}$ (原

则上是精确的)，使得若令

$$Z(\mathscr{E}) = \{(Z,\xi) \mid \text{存在序列 } Z_n,\ \chi_n^j \in \mathscr{E},\ j = 1,2,\cdots,N,\ \text{使得 } Z_n \to Z,\ (\xi_1 + \cdots + \xi_n) \to \xi\},$$

则有

$$\mathrm{WF}\, u \subset Z(\mathscr{E}) \cap T^*\Omega.$$

另外，基于二次微局部化理论，Delort [Del]的结果证实了，若在点(t_0,x_0)附近，集合 $\mathscr{E}$ 包含在一个超曲面 Σ 的余法逼近叙列的集合中(需要一个比 $Z(\mathscr{E})\subset T^*_\Sigma$ 稍强的条件)，则解 u 在这点附近沿 Σ 是余法的.

关于 $\mathscr{E}$ 的确切定义详见[Le2]. 基本上是满足以下类型条件的序列(Z_n,ζ_n)中最小的集合：

(a) 序列 Z_n 收敛到一实点，序列 ζ_n 收敛的方向朝着一复方向，且(Z_n,ζ_n)属于一复化特征簇.

(b) 在“纤维对纤维”的求和下，$\mathscr{E}$ 是稳定的：若它包含 N 个形如(Z_n,ζ_n^j)的序列，且序列$(Z_n,\ \sum_j \zeta_n^j + \varepsilon_n)$ 当 $\varepsilon_n \to 0$ 时满足上述条件，那么它必有一个子序列属于 $\mathscr{E}$.

(c) $\mathscr{E}$ 对“次特征的传播是稳定的”.

(d) $\mathscr{E}$ 包含如上所述的一个序列，其中(Z_n,ζ_n)包含在 $t=0$ 上，且它在 $t=0$，$\tau=0$ 的投影是 V 的(复化)余法丛中的元素.

上面的第二和第三个条件描述的是相互作用和传播. 此外，若只考虑有限多个奇性的相互作用，则对于每个 $\sigma\in \mathbf{R}$，可以定义一个限制更强的集合，使得在这个集合外 u 微局部地属于 H^σ.

证明的思想十分不同于在此之前用过的所有方法，u 的波前集的控制归结为一个多重积分波前集的控制，多少类似于Feynman 振幅，使用到波方程的基本解的张量积，每一个积分均反映出一个传播相互作用的图.

一个特别令人注意的特殊情况是这样一个简单波束，在二维时，所给的 Cauchy 数据相对于例如一抛物线是余法的. 在线性情况下，奇性沿着时空的“燕尾”传播(出现焦散)，对一固定的 t，我们

用粗线画出其一截口. 又考虑到在非线性情况奇性还出现在由一点发出的光锥上，我们用细线的圆表示这一截口(见图 3).

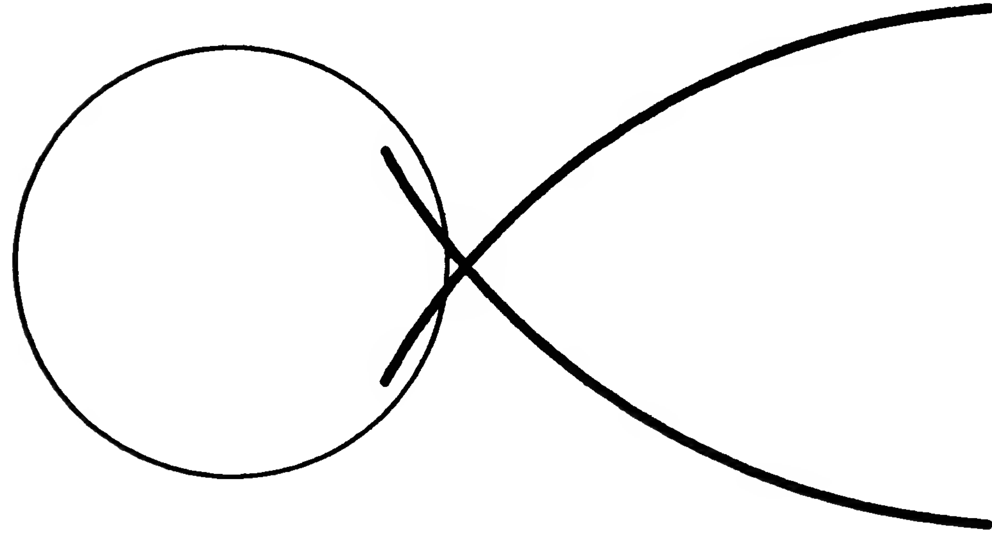


图 3

解 u 在上述曲面外是 C^∞ 的，在光滑点附近波前集包含在曲面的余法丛中. 此外，根据上面提到的结果，解在这些点是余法的，从而可以研究以上的相互作用. 这些结果可由对序列集合 $\mathscr{E}$ 的精确计算得到，但这是不容易的.

参考文献

[Ala] A Alabidi. Réflection transverse des singularites pour un probléme aux limites non-linéaire d'order deux. *These de 3eme Cycle*, *Rennes*, 1984

[Ali1] S Alinhac. Evolution d'une onde simple pour des équations non-linéaires générales. *Current Topics in P. D. E. Kinokuniya Tokyo*, 1986: 63-90

[Ali2] S Alinhac. Interaction d'ondes simples pour des équations complétemnt non-linéaires. *Ann. Sci. ENS* (4ᵉ *série*), **21**, 1988: 91-132

[B-G] M S Baouendi, C Goulaouic. Nonanalytic-hypoellipticity for some degenerate elliptic opersators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**, 1972: 483-486

[Be1] R Beals. Characterization of pseudodifferential operators and applications. *Duke Math. J.*, **44**, 1977: 45-57

[Be2] R Beals. A general calculus of pseudo-differential operators, *Duke Math. J.*, **42**, 1975: 1-42

[B-F] R Beals, C Fefferman. Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators I. *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**, 1974: 1-24

[Bea1] M Beals. Self-spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equations. *Ann. of Math.*, **118**, 1983: 187-214

[Bea2] M Beals. Vector fields associated with the nonlinear interaction of progressing waves. *Indiana Univ. Math. J.*, **37**, 1988: 637-666

[B-M1] M Beals, G Métivier. Progressing wave solution to certain non-linear mixed problems. *Duke Math. J.*, **53**, 1986: 125-137

[B-M2] M Beals, G Métivier. Reflection of transversal progressing waves in non-linear strictly hyperbolic mixed problems. *American Journal of Math.*, **109**, 1987: 335-360

[B-C-N] P Bolley, J Camus, J Nourrigat. La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-differentiels. *Comm. P. D. E.*, **7**, 1982: 197-221

[Bon1] J-M Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées nonlinéaires. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **14**, 1981: 209-246

[Bon2] J-M Bony. Second microlocalization and interaction of singularities for non linear P. D. E.. *Hyperbolic equ. and related topics*, *Mizohata ed.*, *Kinokuniya*, 1986: 11-49

[Bon3] J-M Bony. Singulartés des solutions des problémes de Cauchy hyperboliques non linéaires. *Advances in Microlocal Analysis*, *M. G. Garnir ed.*, 1986: 15-39

[Bon4] J-M Bony. Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires. *Sém. Goulaouic-Schwartz Ec. Polytechnique*, No. 22, 1979-1980; *Sém. Goulaouic-Schwartz Ec. Polytechnique*, No. 2, 1981-1982

[Bon5] J-M Bony. Analyse microlocale des équations aux dérivées partielles non linéaires. *Microlocal Anal. and Appl.*, *Lecture Notes Math.*, 1495, *Springe-Verlay*, 1991 (中译文见数学进展 1993 年, **22**, No. 3).

[B-C] J-M Bony, J-Y Chemin. Espaces fonctionels associés au calcul de Weyl-Hörmander. *to appear*

[B-L] J-M Bony, L Lerner. Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur, Ⅰ. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, *4éme série*, **22**, 1989: 377-433

[C-C] C E Cancelier, J Y Chemin. Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-differentiels vérifiant le principe du maximum. *Preprint de Ecole Polytechnique*, 1991

[C-C-X] C E Cancelier, J Y Chemin, C J Xu. Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, **43**, 1993: 1157-1178

[C-V] A P Calderon, R Vaillancourt. A class of bounded pseudodifferential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **69**, 1972: 1185-1187

[Chem1] J-Y Chemin. Calcul paradifférentiel précisé et applications aux équations aux dérivées partielles semilinéaires. *Duke Math. Journ.*, **56** (3), 1988: 431-469

[Chem2] J-Y Chemin. Interaction contrôlée dans les E. P. D. non linéaires strictement hyperboliques. *Bull. Soc. Math. France*, **116**, 1988: 341-383

[Chem3] J-Y Chemin. Interaction de trois ondes dans les équations semilinéaires strictement hyperboliques d'ordre 2. *Comm. in P. D. E.*, **12** (11), 1987: 1203-1225

[Chem4] J-Y Chemin. Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires (待发表)

[Chen1] S X Chen. Piecewise smooth solutions of semilinear hyperbolic systems in higher space dimension. *Chin. Ann. Math.*, **10**(*B*), 1989: 361-370

[Chen2] S X Chen. Multidimensional Riemann problem for semilinear wave equations. *Comm. in P. D. E.*, **17**, 1992: 715-736

[Chen3] S X Chen. Essentially multidimensional Cauchy problems for semilinear hyperbolic equations with discontinuous data. *Nonlinear Ana. & Microlocal Ana.*, *World Scientific*, 1991: 34-43

[Co] M Cotlar. A combinatorical inequality and its application to L^2 spaces. *Rev. Math. Cuyana*, **1**, 1955: 41-55

[Ch1] J Chazarain. Formules de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, **24**, 1974: 65-82

[Ch-P] J Chazarain, A Piriou. Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. *Gauthier-Villars*, 1981 (英译本: *Introduction to the theory of linear partial differential equtions. North-Holland Pub. Co. Amsterdam*, 1982)

[C-M] R Coifman, Y Meyer. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. *Astérisque*, *Soc. Math. France*, *n*57, 1978

[Del] J-M Delort. Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques. *Sém. E. D. P. Ec. Polytechnique*, No. 15, 1988-1989

[De] N Dencker. The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights. *Arkiv. för Mat.*, **24**, 1986: 59-79

[Den] 邓红. 一类亚椭圆算子的象征运算及其基本解. 武汉大学硕士论文, 1993

[Eg1] Ju V Egorov. The canonical transformations of pseudo-differential operators. *Uspechi Mat. Nauk*, **24**, 1969: 235-236

[Eg2] Ju V Egorov. Subelliptic pseudo-differential operators. *Soviet Math. Doklady*, **10**, 1969: 1056-1059

[Eg3] Ju V Egorov. Subelliptic operators. Uspechi Mat. Nauk 30 (2), 1975: 57-114, and **30** (3), 1975: 57-104; also in Russian Math. Surveys **30** (2), 1975: 59-118, and **30** (3), 1975: 55-105

[Fa] D Y Fang. Interaction of conormal waves for higher order semilinear hyperbolic equations. *Doctoral Thesis of Fudan Univ*, 1992

[Fe1] C Fefferman. The Uncertainty principle. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **9**, 1983: 129-206

[F-Ph] C Fefferman, D H Phong. The uncertainty principle and sharp Garding inqualities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**, 1981: 285-331

[Fol] G B Folland. Lectures on partial differential equations. *Springer-Verlag, Berlin*, 1983 (中译本: 程少兰, 吴方同译. 偏微分方程. 武汉: 武汉大学出版社, 1989)

[F-J-W] M Frazier, B Jawerth, G Weiss. Littlewood-Paley theory and the study of function spaces. *CBMS, No. 79, Providence*, 1991

[Hö1] L Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, **119**, 1967: 147-171

[Hö2] L Hörmander. The analysis of partial differential equations, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ. *Springer-Verlag*, 1985

[Hö3] L Hörmander. Subelliptic operators. *Seminar on sing. of sol. of diff. eq., Princeton University Press, Princeton, N. J.*, 1979: 127-208

[Hö4] L Hörmander. The Weyl calculus of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**, 1979: 359-443

[Hö5] L Hörmander. Linear partial differential operators. *Springer-Verlag*, 1976 (中译本: 陈庆益译. 线性偏微分算子. 北京: 科学出版社, 1980)

[Hö6] L Hörmander. Non-linear hyperbolic differential equations. *Lecture Notes. Lunds Univ.*, 1986-1987

[K-S] A W Knapp, E M Stein. Singular integrals and principal series. *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, **63**, 1969: 281-284

[Ko] J J Kohn. Pseudo-differential operators and non-elliptic problems. *CIME conference, Stresa*, 1968: 157-165; *Edizione Cremonese, Roma*, 1969

[K-N1] J J Kohn, L Nirenberg. On the algebra of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**, 1965: 269-305

[K-N2] J J Kohn, L Nirenberg. Non-Coercive boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**, 1965: 443-492

[Kol] A N Kolmogorov. Zu fällige Bewegungen. *Math. Ann.*, **35**, 1934: 116-117

[La] Y Laurant. Théorie de la deuxiéme microlocalisation dans le domaine complexe. *Progress in Math.*, *Vol.* 53, *Birkhauser*, 1985

[Le1] G Lebeau. Probléme de Cauchy semilinéaire en 3 dimensions d'espace. Un résultat de finitude. *Journ. Funct. Anal.*, **77**, 1988

[Le2] G Lebeau. Equations des ondes semilineaires II. Contrôle des singularités et caustiques non linéaires. *Invent. Math.*, 1989

[Le3] G Lebeau. Deuxiéme microlocalisation sur les sous-variétés isotropes. *Ann. Inst. Fourier*, **35**, 1985: 145-216

[Li] P-L Lions. On kinetic equations. *Proc. of ICM* 90 *Kyoto, JMS*, 1991: 1173-1185

[Ma] A Majda. The interaction of nonlinear analysis and modern applied math.. *Proc. of ICM* 90 *Kyoto, JMS*, 1991: 175-191

[Mel1] R Melrose. Transformation of boundary problems. *Acta Math.*, **147**, 1981: 149-236

[Mel2] R Melrose. Semilinear waves with cusp singularities. *Actes Journées E. D. P., Saint Jean de Monts*, **10**, 1987

[Mel3] R Melrose. Pseudo-differential operators, corner and singular limit. *Proc. of ICM* 90 *Kyoto*, *JMS*, 1991: 1-19

[M-R1] R Melrose, N Ritter. Interaction of progressing waves for semilinear wave equation I. *Ann. of Math.*, **121**, 1985: 149-236

[M-R2] R Melrose, N Ritter. Interaction of progressing waves for semilinear wave equation II. *Arkiv för Math.*, **25**, 1987: 91-114

[Met1] G Métivier. The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data. *Duke Math. J.*, **53**, 1986: 983-1011

[Met2] G Métivier. Propagation, interaction and reflection of discontinuous progressing waves. *Amer. J. Math.*, **111**, 1989: 239-289

[Mey1] Y Meyer. Remarques sur un théoréme de J.-M. Bony. *Rend. del Circolo mat. di Palermo* (*suppl. II.* 1), 1981: 1-20

[Mey2] Y Meyer. Ondellettes, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. *Hermann*, 1991

[N-S-W] A Nagel, E M Stein, S Wainger. Balls and metrics defined by vector fields Ⅰ, basic properties. *Acta Math.*, **155**, 1985: 103-147

[O-R] O A Oleinik, E V Radkevic. Second order equtions with non-negative characteristic form. *New York*: *Plenum Press*, 1973 (中译本: 辜联昆等译. 具非负特征形式的二阶微分方程. 北京: 科学出版社, 1986)

[Pi] A Piriou. Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple. *Ann. Inst. Fourier*, **38** (4), 1988: 173-186

[Qi] 齐民友. 线性偏微分算子引论(上册). 北京: 科学出版社, 1984

[Q-X] 齐民友, 徐超江. 线性偏微分算子引论(下册). 北京: 科学出版社, 1992

[R-R1] J Rauch, M Reed. Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves: example. *Comm. P. D. E.*, **7**, 1982: 1117-1133

[R-R2] J Rauch, M Reed. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension. *Duke Math. Journ.*, **49**, 1982: 397-475

[R-S] L Rothschild, E M Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups. *Acta Math.*, **137**, 1977: 247-320

[Sa] M Sablé-Tougeron. Régularité microlocale pour des problémes aux limites non-linéaires. *Ann. Inst. Fourier*, **36** (1), 1986: 39-82

[SB1] A Sà Barreto. Evolution of semilinear conormal waves. *Journées E. D. P., Saint Jean de Monts*, **12**, 1991

[SB2] A SàBarreto. Interaction of conormal waves for fully semilinear wave equations (待发表)

[Se] I Segal. Transforms for operators and asymptotic over a locally compact Abelian group. *Math. Scand.*, **13**, 1963: 31-43

[Sh] 沈未名. 非线性横截入射波在边界上的反射(待发表于数学物理学报).

[Sj1] J Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. *Astérisque*, *n.* 95, *S. M. F.*, 1982

[Sj2] J Sjöstrand. Operators of principal type with interior boundary conditions. *Acta Math.*, **130**, 1973: 1-51

[St] E M Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton, N. J.*: *Princeton University Press*, 1970

[Ta1] M Taylor. Pseudo-differential operators. *Princeton, N. J.*: *Princeton University Press*, 1981

[Ta2] M Taylor. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. *Berlin*: *Birkhauser*, 1991

[Ta3] M Taylor. Micro-local analysis in spectral and scattering theory and index theory. *Proc. of ICM* 90 *Kyoto*, *JMS*, 1991: 1225-1234

[Tar] M Tartar. H-measures and applications. *Proc. of ICM* 90 *Kyoto*, *JMS*, 1991: 1215-1223

[Un1] A Unterberger. Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-differentiels. *Ann. Inst. Fourier*, **29**, 1979: 201-221

[Un2] A Unterberger. Quantification de certains espaces hermitiens symmétriques. *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, No. 16, 1979-1980.

[Wa1] W K Wang. Reflection of transversal progressing wave for quasilinear 2-systems. *Doctoral Thesis*, *Wuhan Univ.*, 1989

[Wa2] W K Wang. Interaction of conormal waves with different singularities for semi-linear equations. *J. Partial Diff. Equ.*, **4** (4), 1991: 87-96

[Wa3] 王维克. 非线性偏微分方程不同奇性的弱奇性波的干扰. 数学年刊, **14**(A), No. 3, 1993: 38-45

[Wa4] W K Wang. Interaction of multi-dimensinal shock and weak singularities for 2 conservation laws. *Nonlinear analysis and microlocal analysis*, *World Scientific*, 1992

[Wa5] W K Wang. Interaction of three progressing wave with different singularites for semilinear wave equations. *Proc. of Inter. Conf. on NEPDE*, 1993

[We] H Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. *Verlag Von S. Hirzel, Leipzig*, 1928

[Xu1] C J Xu. Hypoellipticity of non linear second order partial differental equations. *J. Partial Diff. Equ.*, **1**, 1988: 85-95

[Xu2] C J Xu. Subelliptic variational problems. *Bull. Soc. Math. France*, **118**, 1990: 147-159

[Xu3] C J Xu. Regularity problems for quasilinear second order subelliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**, 1992: 77-95

[Xu4] C J Xu. Probléme de Dirichlet pour les équations associées à un systéme de champs de vecteurs. *Seminaire E. D. P. Ecole Polytechnique*, *n.* 17, 1990-1991

[Xu5] C J Xu. On the regularity of minima of quasiconvex integrals. *Acta Math. Sinica*, **10**, 1992: 362-374

[Xu6] C J Xu. Subelliptic symbolic calculus. *Nonlinear analysis and microlocal analysis*, *World Scientific Press*, 1992: 100-114

[Xu7] C J Xu. Opérateurs sous-elliptique et régularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéairs du second ordre en deux variables. *Comm. P. D. E.*, **11**, 1986: 1575-1603

[Xu8] C J Xu. Régularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires associées à un systéme de champsde vecteurs. Ann. Inst. Fourier, **37**, 1987: 105-113

[Xu9] C J Xu. Propagation au bord des singularités pour des probléme de Dirichlet non linéaires d'ordre deux. *J. Funct. Anal.*, **92**, 1990: 324-247

[Xu10] C J Xu, C Zuily. Smoothness up to the boundary for solutions of non linear and non elliptic Dirichlet problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**, 1988: 243-258

[Xu11] C J Xu. Semilinear subelliptic equations and Sobolev's inequalityfor vector fields satisfying Hörmander's conditon. *Chinese Ann. Math.*, **15**, A: 2, 1994: 185-192

[Xu12] C J Xu, X S Zhu. Nonhomogeneous symbolic calculus and the inverse of a class of degenerate elliptic operators. *To appear in Chinese Ann. Math.*, 1995

[Y-Q1] H C Yin, Q J Qiu. Tangent interaction of conormal waves for second order full nonlinear strictly hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis*, **19** (1), 1992: 81-93

[Y-Q2] 尹会成, 仇庆久. 二阶完全非线性严格双曲型方程的两高阶相切的余法波的干扰. 数学年刊, **14** (A), No. 4, 1993: 23-38

[Zh] 朱旭生. 拟微分算子的 Weyl-Hörmander 运算及一类退化椭圆算子的逆. 武汉大学硕士论文, 1993